No.....
Private Library.
of
Virgil Snyder.
DATE Feb 10th 1894

Wilbur L. Cross Library
University of Connecticut

513.8
K67
83306

BOOK 513.8.K67 c.1
KLEIN # NICHT EUKLIDISCHE
GEOMETRIE
3 9153 00011364 9

QA
685
.K6
189
v.1

Nicht-Euklidische Geometrie, I.

Vorlesung,

gehalten während des Wintersemesters 1889–90

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

— Zweiter Abdruck. —

GÖTTINGEN 1893.

513.8
K67

Vorbemerkung zum zweiten Abdruck.

Der nachfolgende Wiederabdruck meiner Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie von 1889—90 stimmt mit dem ersten Abdruck bis auf wenige kleine Aenderungen wörtlich überein. Ich hätte ja gern viele Lücken, die ich nachträglich bemerkt habe, ausgefüllt und namentlich auf die in der Zwischenzeit erschienene Literatur Bezug genommen, wenn dies irgend möglich gewesen wäre, ohne dafür längere Zeit aufzuwenden, was aus anderen Gründen nicht anging. Nur dies eine will ich hier ausdrücklich hervorheben, dass Helmholtz' Charakterisirung der ∞^6 Bewegungen des Raumes wie auch das Referat, welches ich über dieselben gegeben habe, nach den Untersuchungen von Lie in den sächsischen Berichten von 1886 und 1890 in keiner Weise mehr aufrecht erhalten werden kann. Ich darf den Leser dieserhalb ausser auf Lie's eigene Publicationen auf die Darlegungen verweisen, welche hierüber in dem kürzlich erschienenen zweiten Theile meiner Vorlesung über „Höhere Geometrie" (S.-S. 1893) gegeben worden sind.

Göttingen, Herbst 1893.

F. Klein.

Vorbemerkung zum ersten Abdruck.

Die nachstehende Autographie bringt die von mir im Wintersemester 1889—90 gehaltene Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie nach der Ausarbeitung des Herrn Schilling, unter Beiseitelassung einer allgemeinen Einleitung in die projective Geometrie, in der ich u. A. die projectiven Grundlagen der gewöhnlichen Metrik entwickelt hatte. Ich habe diese Vorlesung im Sommer 1890 noch fortgesetzt; diese Fortsetzung soll jetzt ebenfalls autographiert werden. Was einschlägige Litteratur angeht, die seit 1890 erschienen ist, so verweise ich insbesondere auf die Darstellung der Nicht-Euklidischen Geometrie, welche Herr Lindemann in Band II der Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch veröffentlicht hat, dann auch auf meine Note in Band 37 der mathematischen Annalen, in der ich einige Ideen meiner Vorlesung weiter ausführte, und auf den hier sich anschliessenden Aufsatz von Herrn Killing in Band 39 ebenda, endlich aber auf die zwei Arbeiten, welche Herr Lie in den Sitzungsberichten der Königlich Sächsischen Gesellschaft von 1890 über die Grundlagen der Geometrie veröffentlicht hat.

Göttingen, Anfang 1892.

F. Klein.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Nicht-Euklidische Geometrie I.

I. Projective Auffassung der Euklidischen Metrik.

1. Gewöhnliche Formeln für die Metrik der Ebene oder des Punktes . . 1
2. Geometrie auf der Kugel; Sphärische Trigonometrie 11
3. Die Metrik des unendlich fernen Punktes (Ebene als Grenzfall der Kugel) 26
4. Die metr. Formeln der Ebene als proj. Bez. zu den Kreispunkten . . 33
5. Laguerre's Definition des Winkels durch imag. Doppelverhältnisse . . 47
6. Die metr. Formeln des Punktes als proj. Bez. zum Kugelkreise . . . 52

II. Cayley's Maassgeometrie.

1. Aufgabenstellung 62
2. Maassbestimmung im binären Gebiet 64
3. Der elliptische, hyperbolische, parabolische Fall 69
4. Verschiedene Maassbestimmungen für Grundgebilde zweiter Stufe . . . 84
5. Der elliptische Fall. Vergleich mit der sphärischen Geometrie . . . 88
6. Die elliptische Ebene als Doppelfläche 98
7. Das Bogenelement der elliptischen Ebene 106
8. Der hyperbolische Fall. Die Parallelenfrage 108
9. Trigonometrie, Bogenelement, Flächeninhalt, Summe der Dreieckswinkel . 115
10. Der Kreis in der hyperbolischen Geometrie 125
11. Die Kinematik der hyperbolischen Geometrie. Wegfall der Aehnlichkeitstransformationen 134
12. Der parabolische Fall 151
13. Vom Krümmungsmaass (sc. der Hülfskugel) 158

III. Nicht-Euklidische Geometrie im engeren Sinne.

1. Die principielle Fragestellung; das projective System 160
2. Vorbemerkungen zum historischen Bericht 168

Erste Periode.

1. Gauss, Lobatcheffsky, Bolyai 171
2. Von dem Krümmungsmaass einer beliebigen Fläche und von den Rotationsflächen constanter Krümmung 178
3. Beltrami's Saggio di interpretazione; Beziehungen zu Cayley 191
4. Weiteres über die Flächen constanter Krümmung 200

Seite

Zweite Periode.

1. Riemann's Habilitationsschrift 205
2. Riemann's endlicher Raum 216
3. Conforme Uebertragung der hyperbol. Geometrie auf die Kugel . . . 220
4. Functionentheoretische Beziehungen 233
5. Beltrami's Teoria fondamentale 236
6. Unendlich viele Raumformen verschwindender oder neg. Krümmung . . 242
7. Perspective auf automorphe Functionen 248
8. Freier Bericht über Helmholtz, 1868 258
9. Anschliessende Literatur 275

Dritte Periode.

1. Allgemeine Vorbedingungen 280
2. Arbeiten von 1871, 72 285
3. Unterscheidung der elliptischen und der sphärischen Geometrie: Newcomb, Killing 293
4. Von der Ungenauigkeit der räumlichen Anschauung. Pasch 298
5. v. Staudt's Fundamentalsatz der proj. Geometrie. Du Bois 308
6. Vorbereitung zur endgültigen Einführung projectiver Coordinaten: die Modulfigur 315
7. Wirkliche Herstellung einer projektiven Skala 337
8. Lineare Beziehung zwischen zwei verschiedenen Skalen auf demselben Gebilde 344
9. Lie's Transformationstheorie 353

Schlussbemerkungen (philosophischer, bez. pädagogischer Natur) . 354-365

Nichteuklidische Geometrie.

I. Kapitel. Projective Auffassung der Euklidischen Metrik.

Ehe wir zu dem Hauptgegenstande unserer Vorlesung übergehen, wollen wir noch einige Betrachtungen vorausschicken, die den euklidischen Charakter bewahren. Es handelt sich darum die Maassverhältnisse, wie wir sie in der elementaren Geometrie kennen, consequent projectivisch aufzufassen. Wir schieden bekanntlich bisher zwischen den projectivischen Eigenschaften und den nichtprojectivischen oder, wie man nicht ganz so zutreffend auch sagen kann, zwischen der Geometrie der Lage und des Maasses. Wir hatten gelernt, die projective Geometrie aus sich selbst aufzubauen, indem wir mit v. Staudt unseren Betrachtungen die Vierseitskonstruktion zu Grunde legten und mit ihrer Hülfe die Doppelverhältnisse oder Würfe als Zahlen definierten.

Bereits beginnen wir von dem so gewonnenen Standpunkte aus die Geometrie des Maasses darzustellen. Wenn es sich um die Geometrie der Ebene handelt, so boten sich uns 2 besondere ausgezeichnete Punkte dar, die sogenannten „imaginären Kreispunkte." Ihnen entsprach, indem wir sie als eine degenerierte Curve zweiter Classe auffassten, in Punktcoordinaten die unendlich weite Gerade.

Diese Kreispunkte und die unendlich ferne Gerade setzten uns in den Stand, gewisse Beziehungen der Geometrie des Maasses projectivisch zu definieren. Es sei z. B. nur an die Beantwortung der Fragen erinnert, wann ein Kegelschnitt ein Kreis ist, wann sich 2 Gerade rechtwinklig schneiden, wie sich Ellipse, Hyperbel und Parabel unterscheiden, welches das Kriterium für die Parallelität zweier Geraden ist. In allen diesen Fragen fanden wir eine Antwort, indem wir auf die imaginären Kreispunkte resp. die unendlich ferne Gerade Rücksicht nahmen.

Wir können daher allgemein sagen:

„Vom projectiven Standpunkte aus erscheinen die sämmtlichen hier zur Sprache gebrachten Begriffe nicht als Ausdrücke einer geometrischen Eigenschaft

der betreffenden Figur an sich, sondern einer Beziehung der geometrischen Figur zu einer besonderen Curve 2. Klasse, die in ein Paar imaginärer Punkte ausgeartet ist."

Wie stellen sich nun dieselben Beziehungen für die Geometrie im Punkte dar?

[Man könnte geneigt sein, das Wort Punkt-Geometrie zu bilden, was jedoch grammatikalisch falschen Sinn geben würde.]

Auch hier haben wir bereits einige metrische Verhältnisse betrachtet. Wir haben z. B. gesehen, wann ein Kegel ein Rotationskegel ist, wann zwei Strahlen oder zwei Ebenen oder ein Strahl und eine Ebene auf einander senkrecht stehen. u.s.w. Wir haben diese Fragen projektivisch beantwortet, indem wir den „absoluten Kegel" berücksichtigten.

„Es können also entsprechend die hier aufgeführten auf Geometrie im Punkte bezüglichen metrischen Begriffe aufgefasst werden als projektive Beziehungen der Figuren zu einem bestimmten Kegel 2. Klasse oder 2. Ordnung, dem absoluten Kegel."

Unsere nächste Aufgabe wird es nun sein in dem hiermit bezeichneten Sinne die metrischen Beziehungen noch ausführlicher zu betrachten. Wir werden uns zu fragen

haben, was ist überhaupt ein Winkel, was verstehen wir unter dem Abstand zweier Punkte? Die Antwort auf solche Fragen giebt uns die Maassgeometrie oder Metrik. Wir können daher unsere folgenden Untersuchungen auch mit der Frage überschreiben:

„Wie ordnet sich die Metrik der Ebene und die Metrik im Punkte in die projective Geometrie ein?"

Wir wollen zunächst die gewöhnlichen hierher gehörigen analytischen Formeln zusammenstellen, bei denen wir uns der homogenen Coordinaten x, y, z. resp. u, v, w, bedienen, [die sich an das rechtwinklige System anschliessen] und solche Bemerkungen zufügen, die im Interesse unserer späteren Betrachtungen wichtig sind.

I. Metrik in der Ebene. In dieser haben wir drei Aufgaben zu lösen. Wir haben nämlich zu untersuchen:

1. den Abstand zweier Punkte.
2. den Abstand eines Punktes von einer Geraden.
3. die Bestimmung des Winkels zweier Geraden.

ad 1. Der Abstand zweier Punkte drückt sich analytisch aus:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2}}{zz'}$$

Es ist dies die gewöhnliche analytische Formel, nur scheint sie

in homogener Form. Wir haben dem Abstande r ein doppeltes Vorzeichen gegeben. In der gewöhnlichen Geometrie wird r immer als positiv angesehen, doch ist hierfür durchaus kein zwingender Grund vorhanden. Vor allem, wenn man das Princip der Continuität aufrecht erhalten will, wird man genöthigt sein, auch negative Werte von r zuzulassen. Wir sagen ausdrücklich: Der Abstand r ist eine zweiwerthige Funktion, und nur durch besondere Verabredung kann einer der beiden Werte festgelegt werden.

Ad 2. Der Abstand p eines Punktes von einer Geraden drückt sich analytisch aus:

$$p = \pm \frac{ux + vy + wz}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Auch hier haben wir dem Abstande p ein doppeltes Vorzeichen gegeben. Es gilt hier dieselbe Bemerkung wie unter 1. Der Zähler des Ausdrucks für p giebt gleich 0 gesetzt bekanntlich die Bedingung des Aufeinanderliegens von Punkt und Gerade an; es ist ja dann auch der Abstand $p = 0$.

Ad 3. Ueber den Winkel, den zwei sich schneidende Gerade mit einander bilden, werden wir ausführlicher zu sprechen haben. Zunächst muss ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass wir es bei unserer Fragestellung mit 2 Voll-

strahlen, nicht mit 2 Halbstrahlen zu thun haben. Es handelt sich darum auch nicht um den Winkel, welchen zwei Halbstrahlen der sich schneidenden Geraden bilden. (Fig. 1.)

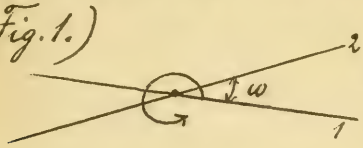
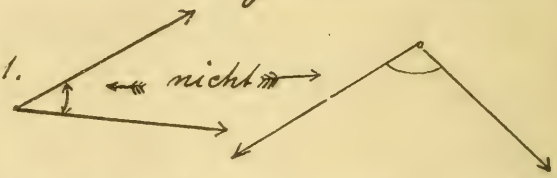


Fig. 1.



Wir definieren nun den Winkel so: Um wie viel muss ich die Gerade 1 drehen, damit sie mit der Geraden 2 zusammenfällt? Wir erkennen sofort, das wir noch einen festen Drehsinn (als den positiven Drehsinn) festlegen müssen. Es ist Gebrauch, den Drehsinn entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers als positiv anzunehmen. (vergl. Fig. 1.) Ferner sehen wir, wie bei der Drehung 1 wiederholt mit 2 zusammenfällt, so dass wir sagen können: „Da es sich bei dem Winkel zweier geraden Linien in der Ebene um den Winkel zweier Vollstrahlen, nicht zweier Halbstrahlen handelt, so ist die Grösse eines Winkels nur bis auf ganzzahlige Mulipla von π festgelegt. Wir rechnen dabei den Winkel 1 gegen 2 so, dass wir angeben, um welchen Betrag man 1 im positiven Sinne drehen muss, damit es in 2 fällt."

Nun hat die tang. bekanntlich die Periodicität π, sin und

cos. dagegen nur die von 2π.

„Dementsprechend muss cos. w und sin w durch einen Ausdruck gegeben sein, der eines doppelten Vorzeichens fähig ist, tg. w aber durch einen Ausdruck, der eindeutig ist." Es ist dies auch in der That der Fall, da in den Formeln für cos. w und sin. w im Nenner eine Quadratwurzel auftritt, die bei tg. w als Quotient von $\frac{\sin. w}{\cos. w}$ fortgefallen ist. Die analytischen Formeln lauten dementsprechend:

$$\cos. w = \pm \frac{uu' + vv'}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}} \quad ; \quad \sin. w = \pm \frac{uv' - u'v}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}} ;$$

$$tg. w = \frac{uv' - u'v}{uu' + vv'}$$

Anm.: Wir vermissen in unseren Formeln in 1, 2, 3, das Princip der Dualität. Wir werden später genauer den Grund hiervon untersuchen. Doch können wir schon jetzt sagen:

„Unsere Formeln sind durchaus undualistisch entsprechend dem Umstande, dass der fundamentale Kegelschnitt undualistisch partikularisiert ist."

Denn letzterer, bestehend aus den imaginären Kreispunkten, ist ja in ein Punktepaar ausgeartet, dem dualistisch die doppelt zählende unendlich ferne Gerade

zugeordnet ist.

II. Metrik im Punkte. Auch hier haben wir drei Aufgaben zu lösen, nämlich den Winkel zu bestimmen, den

1./ 2 Strahlen

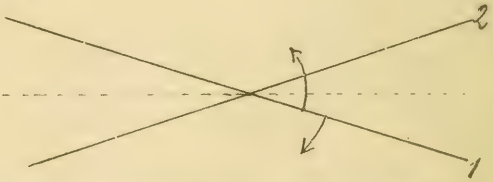
2./ ein Strahl und eine Ebene,

3./ zwei Ebenen

mit einander bilden

Ad. 1. Wir müssen uns fragen, wie weit der Winkel bestimmt ist, den zwei Strahlen mit einander bilden. Auch hier haben wir es natürlich mit 2 Vollstrahlen, nicht mit 2 Halbstrahlen zu thun. Dazu können wir jetzt keinen festen Drehsinn als positiv angeben, da wir die Figur als beliebig im Raume befindlich anzusehen haben, so dass nebenstehende Zeichnung ebenso berechtigt ist, wie das Spiegelbild. Man erhält ja das letztere, indem man unsere Figur um ihre Mittellinie ------ ein halb Mal herumdreht

Figur 2,



„Der Winkel zweier Strahlen ist daher jetzt nicht nur bis auf beliebige Multipla von π unbestimmt, sondern er

kann auch beliebig im Vorzeichen geändert werden."
„Dementsprechend muss nicht nur der cos. und sin., sondern auch die trigonometrische Tangente von w ein doppeltes Vorzeichen besitzen."

In der That ergeben die analytischen Formeln, dass nicht nur im Nenner für cos. w und sin. w ein Wurzelzeichen, und zwar in beiden dasselbe, auftritt, sondern ausserdem besteht auch der Zähler von sin w aus einer Wurzelgrösse, so dass auch tg. w eine solche behält. Die Formeln sind nämlich:

$$\cos. w = \pm \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};$$

$$\sin. w = \pm \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(x'z-xz')^2+(xy'-x'y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};$$

$$tg. w = \pm \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(x'z-xz')^2+(xy'-x'y)^2}}{xx'+yy'+zz'};$$

Nd. 2 und 3. Hat eine Ebene die Coordinaten u, v, w, so sind dies zugleich die Coordinaten der Normale derselben, d.h. der ihr in Bezug auf den absoluten Kegel zugeordneten Polaren. Auch hier wird die Normale nicht als Halbstrahl, sondern als Vollstrahl gedacht.

Eine Gerade (x, y, z) bildet daher mit der Normalen

einer Ebene (u, v, w) Winkel, die bestimmt sind durch die Formeln:

$$\cos.\,\omega = \pm \frac{xu + yv + zw}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}};$$

$$\sin.\,\omega = \pm \frac{\sqrt{(yw - vz)^2+(zu - wx)^2+(xv - uy)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

$$tg.\,\omega = \pm \frac{\sqrt{(yw - vz)^2+(zu - wx)^2+(xv - uy)^2}}{xu + yv + zw}$$

Analog bilden zwei Ebenen u, v, w und u', v', w' mit einander Winkel, die gegeben werden durch die Formeln:

$$\cos.\,\varphi = \pm \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}};$$

$$\sin.\,\varphi = \pm \frac{\sqrt{(vw' - v'w)^2+(wu' - w'u)^2+(uv' - u'v)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\ \cdot\ \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}$$

$$tg.\,\varphi = \pm \frac{\sqrt{(vw' - v'w)^2+(wu' - w'u)^2+(uv' + u'v)^2}}{uu' + vv' + ww'};$$

Anm. Wir bemerken bei der Metrik im Punkte einen wesentlichen Unterschied gegenüber der Metrik in der Ebene.

1. Das hier in 1, 2, 3 enthaltene Formelsystem ist wörtlich

sich selbst durchaus dualistisch, was dem Umstande entspricht, dass der absolute Kegel ein nicht speciali=sirter Kegel zweiter Ordnung und zweiter Klasse ist." Auch hierauf werden wir später zurückkommen.

Wir wollen nun in einem kurzen Excurs betrachten, wie die Elementargeometrie die Aufgaben der Metrik im Punkte löst. In der Elementargeometrie ist es ein unbekannter Ge=danke, Strahlen (oder Ebenen) als Elemente zu betrachten; dort werden nur Punkte durch Coordinaten festgelegt bez. Curven als geometrische Oerter für Punkte in Be=tracht gezogen. Um daher Fragen der „Metrik im Punkte" zu beantworten, legt man um den Punkt eine Kugel vom Radius 1, welche die durch denselben laufenden Strahlen und Ebenen in bestimmten Punkten resp. grössten Kreisen schneidet, deren Beziehungen zu einander man nun be=trachtet. So wird die Maassbestimmung im Punkte ersetzt durch die Maassbestimmung auf der Kugel, die sphärische Geometrie, im weiteren Sinne durch die sphärische Tri=gonometrie. Dabei ist aber, wie wohl zu beachten, die Abbildung des Strahlbüschels auf die Kugel keine ein=deutige. Wir erkennen vielmehr:

„Wenn man der elementaren Vorstellungsweise folgt, dass man das von einem Punkte ausstrahlende Strahlenbündel auf eine um den Punkt laufende Kugel überträgt und so die Geometrie im Punkte in eine sphärische Geometrie verwandelt, so ist dies keine ein-eindeutige Beziehung, sondern eine ein-zweideutige Beziehung." Denn jedem Punkte der Kugel entspricht ein Strahl, jedem Strahl dagegen entsprechen zwei Punkte auf der Kugel.

Die Folge hiervon ist nun, dass in der elementaren Geometrie die Bestimmung der Winkel genauer festgelegt werden kann, wie bei unseren soeben gegebenen Erörterungen.

Wir wollen hierauf noch näher eingehen, da diese Betrachtung später für uns von Vorteil sein wird. Bei der Metrik im Punkte war unsere Aufgabe, den Winkel zwischen zwei Vollstrahlen zu bestimmen, hier dagegen haben wir es nur mit zwei Halbstrahlen zu thun, deren Richtungsunterschied gesucht ist.

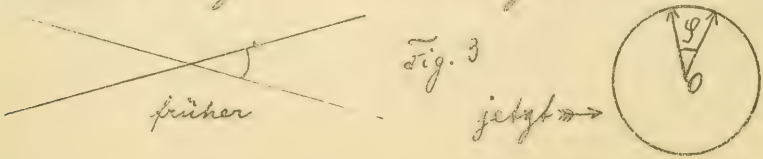


Fig. 3

Unsere Aufgabe ist also specialisierter. Während der Winkel zwischen den Vollstrahlen nur bis auf das Vorzeichen und ein beliebiges Multiplum von π bestimmt war, können wir jetzt folgenden Satz aussprechen: „Indem wir die Geometrie auf der Kugel an Stelle der Geometrie im Punkte betrachten, erscheint der Winkel φ zwischen zwei Strahlen (Halbstrahlen) bis auf das Vorzeichen und Multipla von 2π bestimmt."

Der allgemeine Wert des gesuchten Winkels ist gleich

$$\pm \varphi + 2k\pi;$$

Was bedeutet dies nun für $\sin.\varphi$ und $\cos\varphi$?

Da $\cos.(+\varphi) = \cos(-\varphi)$, dagegen $\sin.(+\varphi) = -\sin.(-\varphi)$ ist, $\cos.(\varphi+2\pi)$ und $\sin.(\varphi+2\pi)$ aber übereinstimmend gleich $\cos.(\varphi)$, bezw. $\sin(\varphi)$, so muss dem letzten Satze entsprechen, dass $\cos.\varphi$ sich jetzt eindeutig festlegen lässt, während $\sin.\varphi$ nach wie vor ein doppeltes Vorzeichen behält.

Betrachten wir nun die analytischen Formeln und sehen, wie dies stimmt. Es ist zunächst:

$$\cos.\varphi = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}.$$

Da jedoch x, y, z resp. x', y', z' jetzt die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte sind, in welchen die

Halbstrahlen die Kugelfläche schneiden, so tritt eine bedeutende Vereinfachung der Formel ein. Es ist ja: $x^2+y^2+z^2=1$ und $x'^2+y'^2+z'^2=1$ — denn der Radius der Kugel ist gleich der Längeneinheit zu setzen —, so daß der Nenner sich auf eine Konstante reduciert. Wir haben die Wahl, diese Konstante gleich +1 oder gleich −1 zu setzen. Aus der Betrachtung des speciellen Falles, wo die beiden Halbstrahlen zusammenfallen, folgt, daß wir +1 zu wählen haben. Haben wir aber so einmal zwischen +1 und −1 entschieden, so nöthigt uns das Princip der Continuität nicht, wie früher, zu dem andern Vorzeichen zu kommen, da ja der Nenner garnicht mehr variabel ist. Dagegen behalten wir im Ausdrucke von $\sin.\mathcal{S}$ eine Quadratwurzel:

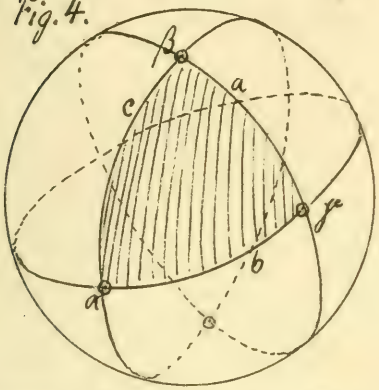
$$\sin.\mathcal{S}=\pm\sqrt{(yz'-y'z)^2+(x'z-xz')^2+(xy'-x'y)^2},$$

wieder in Uebereinstimmung mit unserer Ueberlegung.

„Unser vorhin aufgestelltes Resultat stimmt daher mit der analytischen Formel, in welcher die Quadratwurzel sich jetzt auf eine Konstante reduciert, so daß nichts etwa ihr Werk bei der Bewegung der in Vergleich kommenden Punkte sich im Vorzeichen ändern kann."

An diese Erläuterungen wollen wir noch einige Bemerkungen über sphärische Trigonometrie anschliessen. Es sei auf der Kugel vom Radius 1 ein sphärisches

Fig. 4.



Dreieck gezeichnet, d.h. ein Dreieck, dessen Seiten Bogen grösster Kreise sind.

Durch die Schraffierung des Dreiecks haben die Winkel α, β, γ und die Seiten a, b, c ganz bestimmte Beträge. Wir wollen nun ausdrücklich bemerken, so trivial dies auch klingen mag:

„Die sphärische Trigonometrie hat es mit den absoluten Werten dreier Winkel α, β, γ und dreier anderer Winkel a, b, c (auch als Seiten des Dreiecks bezeichnet) zu thun, die nicht etwa durch Multiplication von π oder 2π modificiert werden können."

Die elementare sphärische Trigonometrie betrachtet nun nur die sin. und cos. der eben genannten 6 Winkel und giebt die Beziehungen derselben zu einander an. Sie zeigt vor allem, wie man, wenn einige der sin. und cos. gegeben sind, die anderen daraus

bestimmen kann. Doch es bleiben bekanntlich der sin. und cos. eines Winkels unverändert, wenn man zu ihm $2k\pi$ hinzufügt. Wie kommt es, daß in der elementaren Trigonometrie die Winkel dennoch aus ihren sin. und cos. hinreichend bekannt sind?

„Wenn trotzdem die gewöhnliche sphärische Trigonometrie sich darauf beschränkt, nur die sin. und cos. der 6 Größen in Betracht zuziehen, so liegt dies daran, weil sie stillschweigend das Bestehen folgender Ungleichung voraussetzt:

$$0 < \alpha, \beta, \gamma,\ a, b, c < 2\pi.$$

Doch ist es unbedingt nötig, diese Voraussetzung zu machen? Nein, keineswegs. Man kann sehr wohl solche Dreiecke betrachten, bei denen einige der Winkel $> 2\pi$ oder < 0 sind. Die Functionentheorie zwingt sogar dazu, solche Dreiecke herbeizuziehen, bei denen Windungspunkte in den Ecken liegen und die Seiten in Folge dessen mehrmals um die Kugel herumlaufen. Ein einfaches Beispiel möge uns der specielle Fall der nebenstehenden Figur bieten. Wir wollen die Bezeichnung, zum besseren Verständnis, der mathematischen Geographie entlehnen. Es sei α

der Nordpol, a ein Bogen des Aequators, c ein Bogen des Anfangsmeridians (Fig. 5, a). Wir können nun sehr wohl den Winkel α über 2π hinaus wachsend denken. Das Dreieck α β δ greift dann allerdings über sich selbst hinüber, was ja bei der Betrachtung Riemann'scher Flächen durchaus nichts Aussergewöhnliches ist.

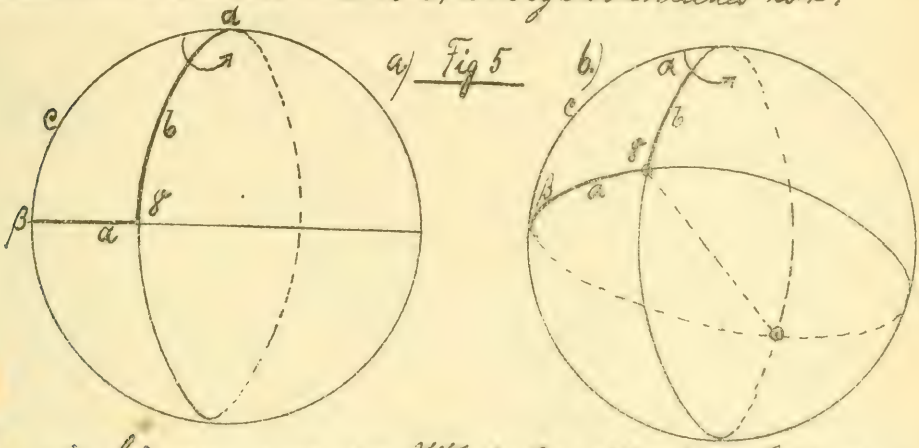


Fig 5

Ja, wir können sogar den Winkel α über 4π, 6π etc. wachsen lassen. Es ist natürlich, dass der Winkel a in unserem speciellen Falle gleichfalls mehrere Windungen auf dem Aequator macht und in dem entsprechenden Intervall 0 bis 2π, 2π bis 4π u.s.w liegt. Denn der Winkel α und der Winkel a sind stets einander gleich.

Wir können uns ferner von der Wahl des speciellen Dreiecks in Fig 5 a. befreien, dieselben Betrachtungen gelten auch für das Dreieck α β δ in Fig 5 b. Wir können

endlich diese Betrachtungen ausdehnen auf den Fall, wo nun auch die übrigen Ecken des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ als Windungspunkte erscheinen, wenn die Vorstellung sich jetzt auch schwieriger gestaltet. Allgemein kann man sagen: „Die elementare sphärische Trigonometrie kann man dahin verallgemeinern (und die Functionentheorie drängt mit Nothwendigkeit auf diese Verallgemeinerung hin), dass man auch Dreiecke zulässt, deren Winkel $\alpha\beta\gamma$ und $abc > 2\pi$ sind (oder < 0 sind), bei denen also Windungspunkte in den Ecken und mehrfache Ueberdeckungen der Kugel und einzelner Teile derselben auftreten. Für solche Dreiecke geben die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie, indem sie blos den sin. und cos. der $\alpha\beta\gamma$, abc beherrschen, nur erst einen ersten Beitrag, es fehlt eine zweite Reihe von Relationen, die uns angeben, wie die absoluten Werte von $\alpha\beta\gamma$ und abc untereinander verbunden sind."

Diese zweite Reihe von Relationen wird uns anzugeben haben – etwa in einer Tabelle –, auf welches Intervall der folgenden Skala

die Werthe von a, b, c treffen, wenn gesagt ist, auf welches Intervall die α β γ zu liegen kommen und umgekehrt. Es kann nicht schwer sein, durch Continuitätsbetrachtungen diese Tabelle zu finden. Daneben bestehen dann ungeändert die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Zusatz.

Wir können dieselben Betrachtungen, wie sie die sphärische Trigonometrie anstellt, natürlich auch in der Geometrie im Punkte vornehmen. Dem sphärischen Dreieck entspricht hier ein Dreikant, doch bestehen die Kanten desselben wieder aus Vollstrahlen, die nach den Ecken des sphärischen Dreiecks laufen:

„Alles, was dann von den sphärischen Dreiecken gilt, kann man auf die Dreikante übertragen, welche sich vom Mittelpunkte der Kugel aus nach den sphärischen Dreiecken hinziehen, nur dass man die Bedingung: $0 < \alpha, \beta, \gamma, a, b, c < \pi$ stellen muss, wenn man keine mehrfachen Ueberdeckungen von Theilen des Raumes haben will." —

Wir wollen nun noch eine letzte Frage in Betreff

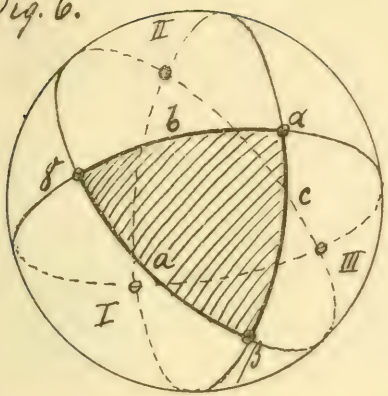
der sphärischen Trigonometrie stellen. Ist in der Trigonometrie ebenso wie bei den allgemeinen Grundlagen der Metrik im Punkte das Princip der Dualität gültig?

„Von Hause aus ist dies keineswegs notwendig, wenn auch die Maassbestimmung im Punkte sich selbst dualistisch ist und bei dualistischer Umformung den Ecken eines sphärischen Dreiecks die Begrenzungslinien eines zweiten, den Seiten die Ecken eines anderen Dreiecks entsprechen. Denn das, was wir von dem sphärischen Dreieck schraffieren, (v. Fig. 6) und eben dadurch als Dreiecksfläche bezeichnen, ist ein Aggregat von unendlich vielen Punkten und dem wird dualistisch ein Aggregat nicht von Punkten, sondern von Ebenen bezw. grössten Kreisen entgegenstehen."

Wir wollen jedoch noch näher hierauf eingehen und zu dem Zweck einmal 3 grösste Kreise auf der Kugel ziehen und zusehen, wie die Kugelfläche hierdurch zerlegt wird.

Wir erkennen sofort aus der Figur, daß die Kugeloberfläche in 8 Dreiecke zerlegt ist, von denen je zwei dieselben Winkel und Seiten haben. Uebrigens

Fig. 6.



sind die zwei nicht zu einander kongruent, sondern vielmehr symmetrisch, indem die Reihenfolge der Winkel resp. Seiten eine verschiedene ist.

Wir brauchen daher nur 4 verschiedene Dreiecke zu unterscheiden; außer dem ursprünglichen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ wollen wir betrachten die drei Dreiecke I, II, III, welche jedesmal das ursprüngliche zu einem sphärischen Zweieck ergänzen. Aus letzter Bezeichnung folgen sofort die Winkel und Seiten der drei Dreiecke:

I.	$\alpha\,;\ \pi-\beta,\ \pi-\gamma$	$a;\ \pi-b,\ \pi-c\,;$
II.	$\pi-\alpha;\ \beta\,;\ \pi-\gamma$	$\pi-a;\ b,\ \pi-c\,;$
III	$\pi-\alpha;\ \pi-\beta;\ \gamma\,;$	$\pi-a;\ \pi-b;\ c.$ —

Wir erkennen:

„Jeder Winkel kommt bei den 8 Dreiecken im Ganzen viermal vor, und da jedes Dreieck 6 Bestimmungsstücke mit sich bringt, so werden wir

im Ganzen $\frac{3 \cdot 6}{4} = 12$ verschiedene Winkel haben, nämlich $\alpha\beta\gamma$, abc und ihre Nebenwinkel."

Wir können diesem Satze auf Grund obiger Tabelle sofort die Folgerung hinzufügen:

Folgerung: „Die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie müssen die Eigenschaft haben, ungeändert zu bleiben, wenn man die Elemente des ursprünglichen Dreiecks durch die Elemente einer der obigen drei Reihen ersetzt."

Wie steht es nun mit der Dualität in der sphärischen Trigonometrie? Wir wollen die Figur 6 auf pag. 21 zum Zweck dieser Untersuchung dualistisch in Bezug auf den absoluten Kegel umformen. Es entsprechen dabei den drei grössten Kreisen auf der Kugel dualistisch die Schnittpunkte ihrer drei Normalen — diese als Vollnormalen betrachtet — mit der Kugelfläche, denn die Polare einer Ebene ist die Normale derselben. Umgekehrt entsprechen den 6 Eckpunkten, von denen je zwei auf denselben Kugeldurchmesser liegen, die drei grössten Kreise, in welchen die auf den 3 Durchmessern senkrechten Ebenen die Kugeloberfläche

schneiden. Wir haben so die Polarfigur, spec. die Polardreiecke zu den ursprünglichen Dreiecken erhalten. Diese Betrachtung der Polardreiecke ist in der elementaren Geometrie ganz gewöhnlich, sie war bereits angewendet, sobald man anfing sich mit sphärischer Trigonometrie zu beschäftigen, zu einer Zeit, als das Princip der Dualität noch keineswegs allgemein bekannt war. Auch bei der Polarfigur ist also die Kugel in 8 Dreiecke geteilt, die den ursprünglichen zwar dualistisch entsprechen, was die Ecken und die begrenzenden Kreislinien angeht, doch nicht so, dass auch die Dreiecksfelder selbst zu einander polar wären. Vielmehr entspricht den einzelnen Punkten der Dreiecksflächen der ersten Figur bei der dualistischen Umkehr eine Schaar von grössten Kreisen und umgekehrt. Daher darf es uns auch nicht wundern, dass wir in den Dreiecken der Polarfigur Zusammenstellungen von Winkeln und Seitenlängen erhalten, die nicht ganz dualistisch denen der ursprünglichen Dreiecke entsprechen. Folgendes Schema wird die Seitenlängen und Eckenwinkel für die Dreiecke beider Figuren geben:

Ursprüngliche Figur:		Polarfigur:
a, b, c ; α, β, γ;	entspricht:	$\pi-\alpha, \pi\beta, \pi-\gamma$; $\pi-a, \pi-b, \pi-c$
I. $a, \pi-b, \pi-c$; $\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$	"	$\pi-a, \beta, \gamma$; $\pi-a, b, c$;
II. $x-a, b, \pi-c$; $\pi-\alpha, \beta, \pi-\gamma$	"	$\alpha, \pi-\beta, \gamma$; $a, \pi-b, c$;
III. $\pi-a, \pi-b, c$; $\pi-\alpha, \pi-\beta, \gamma$	"	$a, \beta, \pi-\gamma$; $a, b, \pi-c$,

Dementsprechend können wir folgenden Satz aussprechen:

„Die Formeln der sphärischen Trigonometrie sind nicht direkt sich selbst dualistisch, sie bleiben nicht ungeändert, wenn man $\alpha\beta\gamma$ mit a, b, c bezw. vertauscht mit $\pi-a, \pi-\beta, \pi-\gamma$; $\pi-a, \pi-b, \pi-c$. oder auch durch die Grössen irgend einer der folgenden Horizontalzeilen ersetzt."

Da nun $\cos(\pi-a) = -\cos. a$

$\sin(\pi-a) = \sin. a$ ist, so können wir auch sagen:

„Die Formeln der sphärischen Trigonometrie bleiben ungeändert richtig, wenn man in ihnen a, b, c bezw. mit α, β, γ vertauscht und dabei alle cos. im Vorzeichen ändert."

Zum Abschluss dieser Betrachtungen wollen wir die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, um

uns später leicht auf dieselben beziehen zu können, hier ausdrücklich zusammenstellen.

Anmerkung: Als Litteratur ist an dieser Stelle zu erwähnen: Baltzer, Elemente der Mathematik.

Dies Werk ist des systematischen Aufbaues und der historischen Notizen wegen, die sich in ihm finden, als Handbuch besonders zu empfehlen.

Die Formeln lauten zunächst:

I. $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$.

II. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$;

III. $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} b \sin a}{\sin c - \operatorname{tg} b \cos c \cos a}$;

Wenden wir auf diese 3 Grundgleichungen unseren letzten Satz über die Vertauschung der Winkel und Seiten an, so liefert uns die Gleichung II die neue Formel:

II': $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$. Dagegen liefert uns die Gl. I wie die Gl. III nichts Neues. Während die Gl. I bei der Vertauschung in sich selbst übergeht, würde uns die Gl. III eine Formel liefern, die wir aus III auch durch Auflösung nach tg b erhalten würden.

Diese Formeln werden wir weiterhin auch so

benutzen, dass wir sie nicht auf die Kugel vom Radius 1, sondern auf eine Kugel von einem beliebigen Radius R sich beziehen lassen. Im letzteren Falle mögen die Seiten eines sphärischen Dreiecks gleich A, B, C gesetzt sein, aus denen sich dann a, b, c ergeben als resp $\frac{A}{R}, \frac{B}{R}, \frac{C}{R}$. Unsere Formeln nehmen dann die Gestalten an:

I. $\sin \frac{A}{R} : \sin \frac{B}{R} = \sin a : \sin. B.;$

II. $\cos. \frac{A}{R} = \cos. \frac{B}{R} \cos. \frac{C}{R} + \sin \frac{B}{R} \sin \frac{C}{R} \cos. a;$

III. $tg. \beta = \frac{tg \frac{B}{R} . \sin. a}{\sin \frac{C}{R} - tg \frac{B}{R} \cos. \frac{C}{R} \cos. a};$

II'. $\cos. a. = -\cos. \beta \cos. \gamma + \sin \beta \sin. \gamma \cos. \frac{A}{R}.$

Wir kehren nun zu den allgemeinen Betrachtungen zurück. Wir hatten gesprochen von der Maassbestimmung in der Ebene und im Punkte. Hierbei haben wir jedoch stillschweigend eine Voraussetzung gemacht, nämlich dass im ersten Falle die Ebene, im zweiten der Punkt im Endlichen gelegen seien. Von diesen Voraussetzungen wollen wir uns jetzt befreien. Wir betrachten zunächst den Fall, wo der Punkt ins Unendliche gerückt ist. Wir wollen einmal annehmen, er befände sich in der Richtung vertikal

nach oben im Unendlichen. Dann werden alle Strahlen, die nach ihm hingehen, einander parallel sein; die Ebenen, die durch ihn hindurchlaufen, sind sämmtlich zu Vertikalebenen geworden. In diesem extremen Falle der Metrik im Punkte werden wir dann allgemein wohl noch von dem Winkel zweier Ebenen, aber nicht mehr von dem „Winkel" zweier Strahlen, sondern nur von ihrem „Abstande" reden können. Wir führen diesen Fall jedoch sofort auf eine bekannte Betrachtungsweise zurück, wenn wir dies speciellen Strahlen- und Ebenenbündel durch eine Horizontalebene schneiden und so alle Bestimmungen auf die Punkte und Strahlen in dieser Ebene übertragen, wobei die gewöhnlichen Abstände und Winkel der Ebene entstehen.

„Liegt also bei der Metrik im Punkte dieser unendlich weit, so hat die Maassbestimmung, die sich auf seine geraden Linien und Ebenen bezieht, durchaus den Charakter der gewöhnlichen Maassbestimmung in einer im Endlichen verlaufenden Ebene."

[„ 2 Strahlen haben einen Abstand, nicht einen Winkel. Gewissermassen analoge Verhältnisse finden statt, wenn bei der Metrik der Ebene diese unendlich weit fortrückt.

Zwei Strahlen in dieser Ebene bilden dann zwar noch einen bestimmten Winkel, aber der Abstand zweier Punkte wird stets unendlich grofs. Wir verfahren entsprechend dem vorhergehenden Fall, wo wir eine Schnittebene anwandten, jetzt so, dafs wir von einem bestimmten Punkte im Unendlichen aus die Punkte und Strahlen der unendlich fernen Ebene durch Strahlen resp. Ebenen projicieren. Hierdurch wird der Winkel zweier Strahlen der unendlich fernen Ebene durch den Winkel zweier durch den Punkt laufenden Ebenen, der Abstand zweier Punkte dagegen durch den Winkel zweier Strahlen ersetzt.

„Wir sehen, dass so umgekehrt die Maassbestimmungen in der unendlich weiten Ebene ganz den Charakter besitzen, den wir für die Maassbestimmungen in einem im Endlichen gelegenen Punkte kennen."

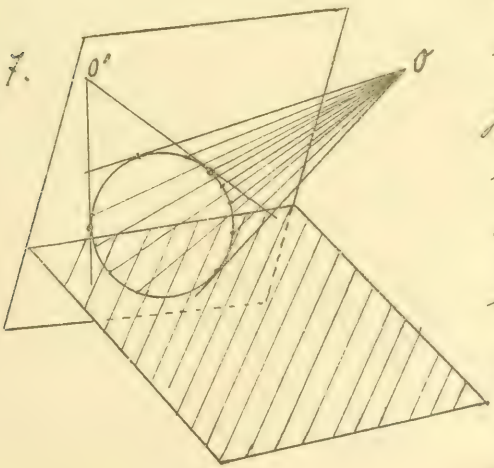
[„Zwei Punkte geben ein Winkel, nicht einen Abstand."].

Wir werden einen deutlichen Einblick in diese Verhältnisse gewinnen, wenn wir diese Sätze in Zusammenhang bringen mit dem imaginären Kugelkreis. Haben wir doch schon früher wiederholt darauf hingewiesen, ohne zwar bereits näher darauf eingegangen zu sein, dass die

Maassverhältnisse überhaupt in engem Zusammenhang stehen mit den imaginären Kreispunkten, in denen die Ebene den Kugelkreis schneidet resp. dem absoluten Kegel, der sich vom Punkte nach dem Kugelkreis hinerstreckt. Es sei in nebenstehender Figur der Kreis eine schematische Darstellung des imaginären Kugelkreises.

Wenn wir nun von einem Punkte im Endlichen aus nach dem Kugelkreise blicken, so bekommen wir einen eigentlichen (wenn auch imaginären) Kegel. Schneiden wir ferner den Kugelkreis durch eine Ebene, — und jede reelle Ebene muss ihn treffen — so schneidet diese denselben nur in 2 Punkten, den imaginären Kreispunkten dieser Ebene, diese Punkte können wir als einen ausgearteten Kegelschnitt ansehen, der in Punktcoordinaten ausgedrückt die unendlich ferne Gerade der Ebene ergiebt

Fig 7.



Wählen wir dagegen den Punkt O in der unendlich

fernen Ebenen selbst, so geht der von ihm auslaufende absolute Kegel über in eine doppelt zählende Ebene, die unendlich ferne Ebene selbst, oder in Ebenenkoordinaten ausgedrückt in ein Strahlenpaar, nämlich die beiden Tangenten von O' an den Kugelkreis. Denn diese werden durch die Tangentialebenen des degenerierten Kegels umhüllt. Wenn wir endlich nicht mit einer beliebigen Ebene den Kugelkreis schneiden, sondern mit der unendlich fernen Ebene, so haben wir wieder einen eigentlichen Kegelschnitt, nämlich den Kugelkreis selbst.

Wir können auf Grund dieser Verhältnisse sagen:

„Der tiefere Grund unserer Sätze liegt darin, dass wir als fundamentales Gebilde ein nicht specialisiertes Gebilde der zweiten Ordnung haben, sobald wir entweder von einem Punkte des Endlichen aus den Kugelkreis projicieren, oder die unendlich weite Ebene selbst wählen, während wir ein einfach specialisiertes Gebilde zweiten Grades erhalten (Punktepaar, Strahlenpaar), wenn wir den Kugelkreis entweder mit einer das Endliche durchziehenden Ebene schneiden oder von einem unendlich weiten Punkte aus projicieren."

Wenn nun die durch das Endliche laufende Ebene den Kugelkreis berührt — eine solche Ebene ist zwar imaginär, doch hindert dies ja gar nicht, besonders bei der Betrachtung analytischer Formeln — was wird dann für eine Maassbestimmung stattfinden? Analog können wir fragen, was eintritt, wenn wir den Punkt im Unendlichen auf dem Kugelkreise selbst wählen. Doch wollen wir uns darauf beschränken, diese Fragen aufgeworfen zu haben.

Dem Falle, wo bei der Metrik im Punkte letzterer ins Unendliche rückt, entspricht in der elementaren Sprache, daß die sphärische Geometrie auf eine Kugel mit unendlich werdendem Radius angewendet wird, wodurch die Kugel in eine Ebene übergeht.

„Der Bemerkung entsprechend, die über die Maassbestimmung in einem unendlich weiten Punkte gemacht wurde, geht die sphärische Geometrie resp. die sphärische Trigonometrie in die gewöhnliche ebene Geometrie resp. Trigonometrie über, wenn man den Radius R unendlich groß werden läßt."

Dies wollen wir noch ausdrücklich nachweisen:

Gemäss den Formeln:

$$\sin.x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\cdots ,$$

$$\cos.x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots\cdots$$ haben wir,

indem wir uns auf kleine Grössen der zweiten Ordnung beschränken, zu setzen für:

$$\lim_{R=\infty} \sin.\frac{A}{R} = \frac{A}{R} ;$$

und $$\lim_{R=\infty} \cos.\frac{A}{R} = 1 - \frac{A^2}{2R^2} ;$$

Es wird dann aus unseren Formeln auf pag. 30

I. $A : B = \sin.\alpha : \sin.\beta .$; [Sinussatz]

II. $$1 - \frac{A^2}{2R^2} = 1 - \frac{B^2}{2R^2} - \frac{C^2}{2R^2} + \frac{B}{R}\cdot\frac{C}{R}\cdot\cos.\alpha ;$$

oder vereinfacht:

$$\cos.\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC} ;$$ [Cosinussatz oder verallgemeinerter Pythagoras.].

Die Formel III führt auf die Relation:

$$tg.\beta = \frac{B.\sin.\alpha}{C - B\cos.\alpha}$$, welche sich als mit Formel I übereinstimmend ergiebt. Die Formel II endlich führt zu der Gleichung:

$\cos.\alpha = -\cos.(\beta + \gamma)$, woraus folgt, dass

$\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist

Wir wollen nun die Wahrheit des Satzes bestätigen:

„Metrische Beziehungen in der Ebene und im Raume sind projective Beziehungen der vorgelegten Figur zu dem System der beiden Kreispunkte bez. zum absoluten Kegel."

Um dies darzuthun, wollen wir die einzelnen Formeln, wie wir sie von pag. 6. beginnend aufgestellt haben, nach einander hierauf prüfen. Wir beginnen mit der Formel für den Abstand zweier Punkte:

$$r = \frac{\sqrt{(xt' - x't)^2 + (yt' - y't)^2}}{t \cdot t'}$$

. Wir wollen uns vor allen Dingen fragen, was es projectivisch bedeutet, wir wir die einzelnen Teile der rechten Seite gleich 0 setzen?

Zunächst bedeutet $t = 0$ resp. $t' = 0$, dass der erste resp. zweite Punkt auf der unendlich weiten Geraden, d. h. auf der Verbindungsgeraden der Kreispunkte liegt. Doch was bedeutet der Zähler gleich 0 gesetzt?

Wir behaupten, es wird hierdurch ausgedrückt, daß die Punkte x und x', mit einander verbunden eine Verbindungslinie geben, die durch den einen

oder anderen der Kreispunkte hindurchgeht. Wir erkennen dies sofort, wenn wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen umformen:

Es ist nämlich:

$$o = \sqrt{(xt'-x't)^2+(yt'-y't)^2} = \sqrt{[(xt'-x't)+i(yt'-y't)]\cdot[(xt'-x't)-i(yt'-y't)]},$$

oder noch übersichtlicher die einzelnen Factoren als Determinanten geschrieben:

$$o = \sqrt{\begin{vmatrix} x & y & t \\ x' & y' & t' \\ i & -1 & o \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & t \\ x' & y' & t' \\ -i & -1 & o \end{vmatrix}}$$

Da $i, -1, o$ resp. $-i, -1, o$ die Coordinaten der Kreispunkte sind, so sagt jede der beiden Determinanten, gleich o gesetzt, aus, dass die gegebenen Punkte x und x' mit dem einen resp. dem anderen Kreispunkte auf einer geraden Linie liegen.

Wir bringen dies noch deutlicher zum Ausdruck, wenn wir uns einmal eine Coordinatenbestimmung denken, in welcher die beiden gegebenen Punkte die Coordinaten x_1, x_2, x_3 resp. x_1', x_2', x_3', und die beiden Kreispunkte die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, resp. ξ_1', ξ_2', ξ_3', haben. Dann können wir den Abstand der

beiden gegebenen Punkte x und x' schreiben:

$$x = \frac{c \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \end{vmatrix}}}{(x, \xi, \xi') \cdot (x' \xi \xi')}$$

Es ist ein konstanter Factor c hinzugefügt, da die Formel von den absoluten Werten der homogenen Coordinaten ξ, ξ' abhängt, die beliebig gewählt werden können. Wir haben so einen Ausdruck erhalten, der durchaus nach den Regeln der projektiven Geometrie gebildet ist.

„Die so geschriebene Formel lässt nun in deutlichster Weise erkennen, dass es sich bei dem Abstande p um eine von den 4 Punkten x, x', ξ, ξ' abhängige Funktion handelt, welche bei projectiven Umformungen ihre Bedeutung behält."

Denn die Determinanten des Zählers gleich 0 gesetzt, drücken aus, dass die 3 Punkte x, x', ξ, resp. x, x', ξ' in gerader Linie liegen, die Determinanten

des Nenners dagegen gleich 0 gesetzt, dass x, ξ, ξ' resp. x', ξ, ξ' auf derselben Geraden liegen. Dies sind lauter Eigenschaften von einem bei projectiven Umformungen unzerstörbaren Charakter.

Wir wollen dies noch ausführlicher nachweisen. Zunächst jedoch werden wir unsere Formel zweckmässig von dem willkürlichen constanten Factor c befreien.

Dieser Factor c war hinzugetreten, um jenen Umstand auszugleichen, dass im Zähler der Formel die homogenen Variabeln ξ und ebenso ξ' nur in der Dimension 1, im Nenner dagegen je in der Dimension 2 vorkommen. Wir beseitigen ihn dadurch, dass wir noch irgend zwei andere Punkte mit den Coordinaten a und a' hinzunehmen, die den Abstand 1 von einander haben sollen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir eine bestimmte Strecke als Längeneinheit wählen. Denn ist

$$1 = \frac{c\sqrt{(aa'\xi)\cdot(aa'\xi')}}{(a\xi\xi')(a'\xi\xi')};$$

so eliminieren wir mit Hülfe dieser Gleichung die Konstante c aus unserer Formel für den

Abstand r, so erhalten wir:

$$r = \frac{\sqrt{(xx'\xi)(xx'\xi')(a\xi\xi')(a'\xi\xi')}}{\sqrt{(aa'\xi)(aa'\xi')\cdot(x\xi\xi')(x'\xi\xi')}};$$

„Um also eine Definition des r zu haben, welche in allen vorkommenden Reihen homogener Variabler wie es doch bei jedem Ausdrucke von geometrischer Bedeutung sein muss, 0ter Dimension ist, werden wir neben den beiden Kreispunkten ξ, ξ' noch zwei Hülfspunkte a und a' einführen, deren Entfernung wir gleich 1 setzen, und dann den zuletzt aufgestellten Ausdruck konstruieren."

Jetzt wollen wir dazu übergehen, genauer nachzuweisen, dass wir es wirklich mit einem projectiven Ausdruck zu thun haben. Wir werden dies dargethan haben, wenn wir zeigen, dass bei projectiven Umformungen der Wert der Formel durchaus unverändert bleibt.

Wenn wir irgendwie unsere Ebene projicieren, so entsteht aus dem Punkte x ein Punkt y, dessen Coordinaten durch die Substitutionsformeln

gegeben sind:

$$y_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 ;$$
$$y_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 ;$$
$$y_3 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 .$$

wo die Determinante Δ der Substitution der Bedingung genügen wird: $\Delta = |a_{ik}| \gtrless 0$;

Entsprechend entstehen aus den Punkten x, ξ, ξ', a, a' Punkte $y, \eta, \eta', \eta'', b, b'$, deren Coordinaten analoge Gleichungen befriedigen. Es sind eben alle Coordinaten der Punkte cogrediente Variabele. Wir denken uns jetzt einen analogen Ausdruck für r wie pag 40 auch für die neue Figur gebildet. Derselbe wird lauten:

$$r = \frac{\sqrt{(xx'\eta)(\xi\xi'\eta')\cdot(b\xi\eta')\cdot(b'\eta\eta')}}{\sqrt{(bb'\eta)(bb'\eta')\cdot(\xi\eta\eta')(\xi'\eta\eta')}}$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun vermittelst unserer Substitutionsgleichungen umformen.

Was wird zunächst aus der Determinante $(yy'\eta)$, wenn wir die Substitutionen einsetzen?

Es ist:

$$(yy'\eta) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 ; & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 ; & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 ; \\ a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 ; & a_{21}x'_1 a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 ; & a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 ; \\ a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 ; & a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 ; & a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 . \end{vmatrix}$$

Nun ist aber vermöge des Produktensatzes zweier Determinanten der letzte Ausdruck gleich:

$= \Delta \cdot (x\,x'\xi)$. d. h. gleich dem Produkt der Substitutionsdeterminante und der Determinante der $x\,x'$ und ξ. Entsprechendes gilt für die übrigen Determinanten des neuen Ausdruckes für Y. Setzen wir dann die so umgeformten Werthe der Determinanten in letzteren ein, so erkennen wir leicht unsere Behauptung:

„In der That erweist sich der Ausdruck für Y gegenüber beliebiger Projection der von den 6 Punkten gebildeten Figur als durchaus unveränderlich, indem nämlich bei linearer Substitution der Variabeln jede dreigliedrige Determinante sich bis auf den Faktor Δ reproduciert, dabei aber im Zähler und Nenner des Ausdrucks Y gleich viele solche Determinanten auftreten.

Hiermit ist unsere Untersuchung über den Abstand zweier Punkte abgeschlossen; wir wollen jetzt gleich dazu übergehen, die Formeln für den Winkel, den zwei Gerade miteinander bilden, als projective Beziehungen zu den Kreispunkten nachzuweisen.

Unsere Betrachtung wird der vorigen analog sein, doch insofern eleganter, als wir nicht genöthigt sein werden, noch irgend welche Hülfsgrössen wie vorhin die Punkte a und a' einzuführen; wir werden aber mit den Kreispunkten allein ausreichen. Es liegt dies daran, dass die Functionen eines Winkels blosse Zahlengrössen sind, dass es zu ihrer Festlegung also nicht mehr nöthig ist, irgend welche Strecke als Längeneinheit einzuführen.

Es war nach pag. 9.

$$\cos.w = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}} \quad \text{und} \quad \sin.w = \frac{uv' - u'v}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}}$$

Wir können unsere folgende Betrachtung in 4 Abschnitte gliedern:

1. Fragen wir uns zunächst wieder, welche geometrische

Bedeutung die einzelnen Teile der Formeln haben, wenn wir sie gleich 0 setzen.

Was heisst es also:

$u^2 + v^2 = 0$,

$uu' + vv' = 0$,

$uv' - u'v = 0$? Wir sehen sofort, daß alle diese Gleichungen Beziehungen zu den Kreispunkten ausdrücken.

Die erste Gleichung ist geradezu die Gleichung der Kreispunkte in Liniencoordinaten.

Die zweite Gleichung entsteht aus der Gleichung der Kreispunkte, wenn wir dieselbe polarisieren. Es besagt dies daher, daß die Geraden mit den Coordinaten u, v, w und u', v', w' zu einander in bezug auf die Kreispunkte conjugiert sind, d.h. in der gewöhnlichen Sprache, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Die dritte Gleichung $uv' - u'v = 0$ endlich giebt an, daß die Linien parallel sind, d.h. sich auf der unendlich weiten Geraden, der Verbindungslinie der Kreispunkte schneiden.

2. Wir wollen jetzt statt des rechtwinkligen ein beliebiges Dreieckscoordinatensystem einführen, um die gerade bezeichneten Verhältnisse klarer hervortreten zu lassen. Es seien die Coordinaten der Strahlen dann u_1, u_2, u_3 und u_1', u_2', u_3'; die der beiden Kreispunkte ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_1', ξ_2', ξ_3'.

Wie stellen sich nun unsere einzelnen Ausdrücke dementsprechend dar?

Aus $u^2 + v^2 = 0$ wird werden: $u_\xi \cdot u_{\xi'}$. Denn $u_\xi = 0$ ist die Bedingung, daß die Linie durch den einen Kreispunkt läuft, entspr. $u_{\xi'} = 0$, daß sie durch den zweiten Kreispunkt geht.

Wie drückt sich ferner jetzt $uu' + vv'$, die Bedingung, daß die beiden Linien zu den Kreispunkten konjugiert sind, aus? Es kommt diese Forderung bekanntlich darauf hinaus, daß die beiden Linien mit den Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten ein harmonisches Quadrupel bilden. Eine beliebige Linie durch den Schnitt von u und u' hat nun die Gleichung: $u_x + \lambda u_x' = 0$. Soll dieselbe durch den einen, resp. den anderen

Kreispunkte gehen, so muß λ entspr. der Bedingung genügen:

$u_\xi + \lambda_1 u'_\xi = 0$ oder $u_{\xi'} + \lambda_2 u'_{\xi'} = 0$. Hieraus findet sich:

$$\lambda_1 = -\frac{u_\xi}{u'_\xi} \; ; \; \lambda_2 = -\frac{u_{\xi'}}{u'_{\xi'}}.$$

Da nun die vier Strahlen $u_x = 0$, $u'_x = 0$, $u_x + \lambda_1 u'_x = 0$, $u_x + \lambda_2 u'_x = 0$ harmonische Lage haben sollen, so muss das Doppelverhältniss $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ sein. Nach Einsetzung der Werte von λ_1 und λ_2 erhalten wir dann:

$u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi \cdot u_{\xi'} = 0$ als unsere gesuchte Bedingung.

Endlich haben wir noch $uv' - u'v = 0$, die Bedingung der Parallelität beider Linien, im neuen Coordinatensystem auszudrücken.

Es ist wieder:

$u_x + \lambda u'_x = 0$ eine Gerade durch den Schnitt von $u_x = 0$ und $u'_x = 0$. Nun verlangt die Parallelität der beiden Linien, daß die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit den beiden Kreispunkten dieselbe Gerade, nämlich die unendlich ferne Gerade, darstellt. Es muss

sich also aus den Gleichungen: $u_\xi + \lambda u'_\xi = 0$ und $u_{\xi'} + \lambda u'_{\xi'} = 0$ derselbe Wert des λ ergeben. Die Elimination von λ aus beiden Gleichungen bietet uns daher die Bedingung der Parallelität beider Linien in der Form:

$$u_\xi \cdot u'_{\xi'} - u_{\xi'} \cdot u'_\xi = 0$$

Hiermit haben wir die drei Gleichungen in 1. sämmtlich in eine allgemeinere Form gebracht.

3.) Setzen wir unsere so erhaltenen Ausdrücke in die Formeln für cos. ω und sin. ω an Stelle der früheren ein, so wird:

$$\cos.\omega = k \frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi \cdot u'_{\xi'}}} \text{ und } \sin\omega = l \frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}}$$

Wir haben in diesen beiden Formeln noch einen konstanten Faktor k resp. l hinzufügen müssen, da unsere einzelnen Ausdrücke den alten ja nur gleich 0 gesetzt entsprachen.

Wir bestimmen diese Konstanten, indem wir zu den speciellen Verhältnissen des rechtwinkligen Coordinatensystems zurückgehen.

Setzen wir für ξ ein $1,\ i,\ 0$
für ξ' $1, -i, 0$,

dann verwandelt sich der Ausdruck für $\cos w$
in $\cos.w = k\,\dfrac{(u_1+iu_2)(u_1'-iu_2')+(u_1-iu_2)(u_1'+iu_2')}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(u_1'^2+u_2'^2)}}$

Wenn wir den Zähler zusammenziehen, so wird dieser gleich $2(u_1u_1'+u_2u_2')$. Es wird daher unsere Formel mit der alten stimmen, wenn wir $k=\frac{1}{2}$ nehmen.

Entsprechend erhalten wir zur Bestimmung von l:

$$\sin.w = l.\,\frac{(u_1+iu_2)(u_1'-iu_2')-(u_1-iu_2)(u_1'+iu_2')}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(u_1'^2+u_2'^2)}}$$

Ziehen wir jetzt den Zähler zusammen, so erhalten wir $-2i(u_1u_2'-u_2u_1')$. Durch Vergleichung mit der alten Formel ergiebt sich dann: $l=-\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}$

Es ist also schliesslich:

3) $\cos.w=\frac{1}{2}\,\dfrac{u_\xi u_\xi'+u_\xi' u_\xi}{\sqrt{u_\xi u_\xi\cdot u_\xi' u_\xi'}}$; $\sin.w=\frac{i}{2}\,\dfrac{u_\xi u_\xi'-u_\xi' u_\xi}{\sqrt{u_\xi u_\xi\cdot u_\xi' u_\xi'}}$.

Diese Formeln 3) definieren uns den cos. und sin. eines Winkels unter Zugrundelegung eines allgemeinen

Coordinatensystems."

Hieran knüpfen wir:

4, als Schluss den Nachweis der Invarianz der Formeln 3 bei projektiver Umformung.

Wenn wir irgend eine Projektion unseres Coordinatensystems vornehmen, so gehen die Coordinaten u, u', ξ, ξ' entspr. über in v, v', η, η'. Dann werden auch unsere Ausdrücke in die entsprechenden Ausdrücke übergehen, die sich genau so aus den v, v', η, η' zusammensetzen, wie die ursprünglichen aus den u, u', ξ, ξ'. Denn die einzelnen Teile haben die Form u_ξ, die wegen der Contragredienz der Variabelen u und ξ, wie früher gezeigt, unmittelbar gleich v_η wird ohne jeden hinzutretenden Faktor.

Wir haben so das Ergebniss:

„Mit den Formeln 3 sind $\cos. w$ und $\sin. w$ als absolute Invarianten derjenigen Figur definiert, die von den beiden geraden Linien u und u' und den beiden Kreispunkten ξ und ξ' gebildet ist."

Jetzt wollen wir jedoch dieser Frage noch eine andere Wendung geben. Wenn wir zwei Linien u und u' haben und zwei Punkte ξ und ξ', so liegt es sehr nahe, nach den Punkten ξ und ξ' von dem Schnitt der Linien aus Gerade zu ziehen und das Doppelverhältniss dieser 4 Strahlen zu bestimmen. Dies ist gewiss eine absolute Invariante.

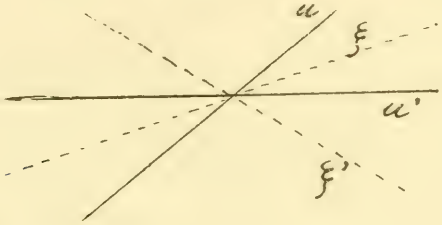


Fig. 8

Wir wollen nun fragen:

„Läßt sich spez. der Winkel α als eine Funktion des Doppelverhältnisses darstellen, welches die beiden Schenkelstrahlen mit den von der Winkelspitze nach den Kreispunkten hinlaufenden Linien bilden?"

Es wäre dies besonders denjenigen Geometern erwünscht, welche allein das Doppelverhältniss als Grundlage der projectivischen Beziehungen anwenden.

Diese berühmte Frage ist zuerst von Laguerre, einem französischen Mathematiker, der vor 2 Jahren

als Mitglied der Pariser Akademie verstorben ist, in einer Jugendarbeit vom Jahre 1853 gelöst*). Merkwürdigerweise hat man erst so spät dieser Untersuchung sich zugewandt. Es lag eben daran, dass die älteren projectiven Geometer sich an den Gedanken gewöhnt hatten, als ständen die metrischen Verhältnisse in keinerlei Beziehungen zu den projectivischen.

Die Arbeit Laguerre's befindet sich in den Nouvelles Annales de Math. t. 12 pag. 64. „Note sur la théorie des foyers." Wie gelangen wir nun zu dem Laguerre'schen Resultat? Wir wollen vor allem erst einmal das Doppelverhältnis der 4 Strahlen selbst berechnen. Durch eine ganz gleiche Betrachtung wie pag. 44 unten, finden wir als Doppelverhältnis der vier Strahlen $u_x = 0;\ u'_x = 0;\ u_x + \lambda_1 u'_x = 0;\ u_x + \lambda_2 u'_x = 0.$

$$\mathfrak{D}\,V = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_\xi \cdot u'_\xi}{u_{\xi_0} \cdot u'_{\xi_0}}.$$ Jetzt ist die Frage, können wir vielleicht dieses Doppelverhältnis aus unseren cos. w und sin. w zusammensetzen? Bilden wir einmal: cos. w − i sin. w.

Wir erhalten vermöge der Formeln auf pag. 46.

*) Laguerre bezeichnet sich daselbst als „élève admis le quatrième à l'École Polytechnique."

$$\cos.\omega - i \sin.\omega = \frac{u_\xi . u'_\xi}{\sqrt{u_\xi . u_\xi , \cdot u'_\xi . u'_\xi ,}} = \sqrt{\frac{u_\xi . u'_\xi}{u_\xi , u'_\xi}} = \sqrt{\mathfrak{D}\, v}.$$

Wir haben so das einfache merkwürdige Resultat gefunden:

„Der Zusammenhang zwischen dem Winkel ω und unserem Doppelverhältnis ist einfach der, dass $\cos.\omega - i \sin.\omega = \sqrt{\mathfrak{D}\, v}$ ist."

Nun können wir setzen:

$$\cos.\omega - i \sin.\omega = e^{-i\omega};$$

dann wird: $e^{-i\omega} = \sqrt{\mathfrak{D}\, v}$ oder $-i\omega = \log. \sqrt{\mathfrak{D}\, v}$;

d. h. $\omega = \frac{i}{2} \log. \mathfrak{D}\, v.$

Dies ist das höchst einfache Resultat von Laguerre.

Es besagt:

Was man in der metrischen Geometrie als den Winkel zweier geraden Linien bezeichnet ist im Sinne unserer jetzigen Entwickelung gleich zu setzen $\frac{i}{2}$ mal dem log. des in der Figur ersichtlichen Doppelverhältnisses, womit dann der invariante Charakter, den wir der Maassbestimmung im Sinne der projectivischen Geometrie beizulegen haben, ohne Weiteres hervortritt.

Wir wollen hieran noch einige Bemerkungen knüpfen, die die Uebereinstimmung der letzten Formel mit unseren sonstigen Vorstellungen darlegen sollen. Das in ihr vorkommende DV ist das Doppelverhältnis zweier reeller Elemente mit 2 konjugiert komplexen. Wir haben früher ein solches Doppelverhältnis einmal ausgerechnet, es hat sich gezeigt, daß der absolute Betrag desselben gleich 1 ist. Wir können daher setzen: $DV = e^{i\varphi}$. Unsere Formel ergiebt dann, da $\log. e^{i\varphi} = i\varphi$ ist, in der That für w einen reellen Wert, nämlich $w = -\frac{\varphi}{2}$. Dies ist gleichsam eine erste Controle für unsere Formel.

Eine zweite Controle bietet folgende weitere Betrachtung. Der log. ist bekanntlich eine unendlich vieldeutige Funktion. Aus einem einmal berechneten Wert (log.) erhalten wir den allgemeinen Wert, wenn wir $2ki\pi$ hinzufügen, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Es ist also: log. = (log.) + $2ki\pi$. Dies heisst dann für unseren Winkel: Wenn wir den Winkel w auf eine bestimmte Weise einmal = (w) berechnet

haben, so dürfen wir beliebig $-k\pi$ hinzufügen. Es ist also nach unserer neuen Definition der allgemeine Wert von $\omega = (\omega) - k.\pi$. Es stimmt dies vollkommen mit der bereits vielfach erwähnten Thatsache, dass der Winkel ω, den zwei Strahlen mit einander bilden, die Periode π besitzt.

Nun wollen wir als eine letzte Controle unsere Formel auf den speciellen Fall anwenden, wo das Doppelverhältnis gleich -1 ist. Wir wissen, dass in diesem Falle die beiden Strahlen rechtwinklig zu einander sein müssen, da sie konjugiert sind in bezug auf die beiden Kreispunkte. Auch unsere Formel liefert dieses Ergebnis. Denn da $\log.(-1) = (2k+1)\,i\,\pi$ ist, so erhalten wir

$\omega = -\frac{2k+1}{2}.\pi = \frac{\pi}{2} - (k+1)\,\pi$, d.h. $\frac{\pi}{2}$, vermehrt um ein beliebiges ganzes Multiplum von π.

Wir wollen nun dazu übergehen, von der Maassbestimmung im Punkte zu sprechen. Wir werden hier jedoch der Kürze halber nur die eine Aufgabe behandeln, den Winkel zwischen zwei Strahlen xyz und $x'y'z'$ als

eine projective Beziehung zu dem absoluten Kegel darzulegen.

Es war:

$$\cos.\omega = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}},$$

$$\sin.\omega = \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}$$

Wir wollen nun an diese Formeln genau eine solche Discussion anknüpfen wie auf pag. 43 ff.

1.) Wir fragen zunächst wieder: Was bedeutet es geometrisch, wenn wir die einzelnen Ausdrücke der Formeln gleich 0 setzen?

Was heisst also:

$x^2+y^2+z^2=0$;

$xx'+yy'+zz'=0$;

$(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2=0$?

Wir werden sehen, dass alle drei Gleichungen Beziehungen zu dem absoluten Kegel ausdrücken.

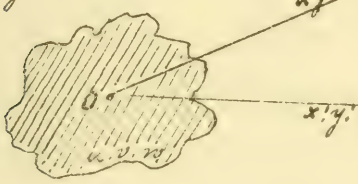
Die erste Gleichung ist unmittelbar die Gleichung des absoluten Kegels.

Die zweite Gleichung stellt die polarisierte Form der ersten dar, sie giebt also an, dass der Strahl xyz zu dem Strahl $x'y'z'$ konjugiert ist in Bezug auf den absoluten Kegel. (Senkrechtstehen beider Strahlen.)

Welche Beziehung drückt nun die dritte Gleichung aus?

Wenn wir durch die beiden Strahlen x und x' eine Ebene legen und die Coordinaten derselben berechnen, so werden diese gerade die Unterdeterminanten des Schemas $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ sein.

Fig. 9



Es wird also:

$$u = yz' - y'z;$$
$$v = zx' - z'x;$$
$$w = xy' - x'y;$$

Setzen wir dann für die Ausdrücke rechts die Coordinaten u, v, w in unsere dritte Gleichung ein, so geht diese über in: $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Diese Gleichung stellt aber den absoluten Kegel in Ebenencoordinaten dar. Unser dritter Ausdruck verschwindet also, wenn die Verbindungsebene der beiden Strahlen den absoluten Kegel (oder was dasselbe ist: den Kugelkreis) berührt.

Es hat sich also herausgestellt:

„Wenn wir die in unseren Formeln auftretenden Ausdrücke einzeln gleich 0 setzen, erhalten wir projective Beziehungen der Strahlen xyz und $x'y'z'$ zum absoluten Kegel."

Anm.: Wir wollen hierzu noch die folgende Identität aufstellen:

$$(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2=(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-$$
$$-(xx'+yy'+zz')^2 .$$

Dieselbe ergiebt sich sehr einfach mit Hülfe unserer Formeln aus der Identität: $\sin^2 w = 1-\cos^2 w$.

2. Wir wollen nun zu einem allgemeinen Dreikant-Coordinatensystem übergehen. Den rechtwinkligen Coordinaten xyz, $x'y'z'$ mögen entsprechen die Dreikantcoordinaten x_1, x_2, x_3 resp. x'_1, x'_2, x'_3. Wie drücken sich nun die 3 Gleichungen unter 1 in diesen neuen Coordinaten aus? Der absolute Kegel wird sich jetzt schreiben: $\sum a_{ik} x_i x_k = 0 = \sum xx'$

wo $a_{ik} = a_{ki}$.

Wir haben uns hier einer bereits früher eingeführten Abkürzung bedient.

Diese Gleichung polarisiert nimmt folgende

Formel an:

$$\Sigma a_{ik} \cdot x_i \cdot x'_k = \sigma = \Sigma_{xx'} .$$

(Früher haben wir mit $\Sigma_{xx'}$ die Form bezeichnet: $\Sigma a_{ik} (x_i x'_k + x'_i x_k)$, welche das Doppelte der unsrigen darstellt. Wir bemerken dies ausdrücklich, da unsere späteren Formeln etwas anders sich gestalten werden wie früher.)

Wir wollen nun drittens die Gleichung des absoluten Kegels in Ebenenkoordinaten bilden. Dies geschieht, indem wir die Determinante der a mit den Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3 ränderm. Doch wir wollen gleich für u_1, u_2, u_3 die Werte einsetzen, welche sich für die Verbindungsebene der beiden Strahlen ergeben, nämlich $u_1 = x_2 x'_3 - x_3 x'_2$; $u_2 = x_3 x'_1 - x_1 x'_3$; $u_3 = x_1 x'_2 - x_2 x'_1$.

So erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_2 x'_3 - x_3 x'_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_3 x'_1 - x_1 x'_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_1 x'_2 - x_2 x'_1 \\ x'_1 x'_3 - x_1 x'_2 & x_3 x'_2 - x_2 x'_3 & x_2 x'_1 - x_1 x'_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Dieser Ausdruck, gleich 0 gesetzt, gielt also an, daß die Verbindungsebene unserer Strahlen eine Erzeugende

des absoluten Kegels ist, d.h. denselben berührt. Wir bezeichnen den Ausdruck zur Abkürzung mit $S_{xx'}$.

3. Wenn wir die so gewonnenen Ausdrücke in unsere Formeln einsetzen, so erhalten wir:

$$\cos.\omega = k.\frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx}\cdot\Sigma_{x'x'}}} \quad ; \quad \sin.\omega = l.\frac{\sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma_{xx}\cdot\Sigma_{x'x'}}}$$

unter k und l 2 zunächst noch unbekannte Faktoren verstanden, analog wie auf pag.

Wir bestimmen diese Faktoren, indem wir zu einem rechtwinkeligen Coordinatensystem zurückgehen. Dann wird die Gleichung des absoluten Kegels:

$0 = \Sigma_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, oder $a_{ik} = 0$ für $i \geq k$, $a_{ik} = 1$ für $i = k$.

Entsprechend wird

$$\Sigma_{xx'} = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' .$$

Setzen wir diese Werte in unsere Formel für $\cos.\omega$ ein, so erkennen wir durch Vergleichung mit der Ausgangsform für $\cos.\omega$, dass wir k einfach gleich 1 zu setzen haben.

Dagegen stimmt $S_{xx'}$ in diesem spec. Falle nur bis

auf das Vorzeichen mit der entsprechenden Grösse unter dem Wurzelzeichen unserer Ausgangsform für sin. ω überein. Wir haben daher den Factor l gleich i zu wählen.

Unsere Formeln nehmen also die Gestalt an:

$$\cos.\omega = \frac{\Sigma_{x x'}}{\sqrt{\Sigma_{xx'}\,\Sigma_{x'x'}}}\,; \text{ und } \sin.\omega = i.\,\frac{\sqrt{S_{x x'}}}{\sqrt{\Sigma_{xx'}\,\Sigma_{x x'}}}$$

Anm. Bilden wir wieder $\sin.^2\omega = 1 - \cos.^2\omega$, so erhalten wir die Identität:

$$S_{x x'} = \Sigma_{x x'}^2 - \Sigma_{xx'}\,\Sigma_{x'x'}.$$

4.) Aus unseren letzten Formeln für cos. ω und sin. ω tritt der invariable Charakter derselben sofort hervor. Denn die einzelnen Ausdrücke S_{xx} und $\Sigma_{xx'}\,\Sigma_{x'x'}$ bedeuten = 0 gesetzt invariable Beziehungen zum absoluten Kegel; aus ihnen aber setzen sich cos. ω und sin. ω derart zusammen, dass sie homogen nullten Grades in den homogenen Coordinaten x und x' wie in den Koefficienten a_{ik} werden.

„Aus unseren Formeln geht also klar hervor, dass die Grössen cos. ω und sin. ω projektive Beziehungen zwischen den Strahlen x, x' und dem absoluten

Kegel ausdrücken."

Wir wollen ferner wieder versuchen, den Winkel ω als Funktion eines Doppelverhältnisses zu definieren. Zu dem Zweck stellen wir uns wieder dar $\cos.\omega - i \sin.\omega$.

Es wird

$$\cos.\omega - i \sin.\omega = \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}.$$ Wir setzen nun

auf Grund der unter obiger Anm. aufgestellten Identität für: $\Sigma_{xx'} \cdot \Sigma_{x'x'}$ ein

$\Sigma^2_{xx'} - S_{xx'}$. Wir erhalten so:

$$\cos.\omega - i \sin.\omega = \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma^2_{xx'} - S_{xx'}}} = \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{(\Sigma_{xx} + \sqrt{S_{xx'}})(\Sigma_{xx'} - \sqrt{S}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{S_{xx'}}}}.$$ In diesen Ausdruck wollen wir noch $S_{xx'}$ ersetzen durch

$\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}$, so dass wir schliesslich bekommen

$$e^{-i\omega} = \cos.\omega - i \sin.\omega = \sqrt{\frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}}.$$

Wir werden uns jetzt erinnern, dass der Ausdruck unter dem Gesammtwurzelzeichen uns bereits bekannt ist und zwar eben als der Wert eines gewissen Doppelver-

hältnisses. Wir können daher schreiben:

$$e^{i\omega} = \sqrt{\mathfrak{D}V}\,; \text{ oder } \omega = \frac{i}{2} \log. \mathfrak{D}V.$$

Was war dies nun für ein charakteristisches Doppelverhältnis? Es ist dies sehr einfach darzulegen. Es seien zwei Strahlen x und x' und ein Gebilde 2. Classe $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ gegeben. Betrachten wir dann in dem Strahlenbüschel $x + \lambda x'$ gerade die beiden Schnittstrahlen mit dem Kegel, so bilden diese mit den Strahlen x und x' das Doppelverhältnis $\mathfrak{D}V$.

Wir können daher unser Resultat zusammenfassend so ausdrücken:

„Als Winkel zweier Strahlen x, x', die durch unseren festen Punkt laufen, erscheint das Product von $\frac{i}{2}$ mal dem log. desjenigen Doppelverhältnisses, welches von den beiden Strahlen mit denjenigen beiden weiteren Strahlen gebildet wird, die die Verbindungsebene der beiden gegebenen Strahlen aus dem absoluten Kegel ausschneidet."

Wir wollen noch der Modification gedenken, die diese Formel annimmt, wenn wir auf der „Kugel" operieren, die um den festen Punkt gelegt ist. Die Kugel möge den Radius R haben, während wir mit Ω den Bogen der zu bestimmenden

sphärischen Seite darstellen wollen.

Es ist dann: $\Omega = \frac{Ri}{2} \log. DV.$

„Unsere Formel modificiert sich beim Übergange zur Kugel vom Radius R also nur dadurch, dass an Stelle des Factors $\frac{i}{2}$ jetzt $R.\frac{i}{2}$ eintritt."

Wir sind so zum Abschluss des 1. Kapitels gekommen, in dem es sich darum handelte, die metrischen Begriffe der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie in das System der projectiven Geometrie einzuordnen. Bei der Metrik der Ebene geschah dies mit Hülfe der imaginären Kreispunkte, bei der Metrik im Punkte mit Hülfe des absoluten Kegels. Wir wollen diesen Betrachtungen noch folgende Bemerkung, die Raumgeometrie betreffend, die wir bisher ausser Acht gelassen haben, hinzufügen:

„Entsprechend dem, was jetzt über Ebene und Punkt gesagt ist, wird alle Metrik im Raume auf projective Beziehung zum Kugelkreis hinauskommen; insbesondere wird jeder Winkel der Raumgeometrie als das Product von $\frac{i}{2}$ in den log. eines DV definiert werden können.

II.

Historische Bemerkung:

Diese Auffassung der metrischen Geometrie, die wir bisher besprochen haben, ist vor allem das Verdienst der französischen Schule.

Wir haben im ersten Theile dieser Vorlesung bereits öfter Poncelet erwähnt, dessen Fundamentalwerk 1822 erschienen war. Später hat sich jedoch Poncelet der technischen Mechanik gewidmet, wo er einer der gefeiertsten Forscher ist. [Er hat z.B. den Begriff der „Arbeit" konsequent in die Mechanik eingeführt.] Hierdurch ist er dazu gekommen, seine geometrischen Untersuchungen liegen zu lassen. Dann hat Chasles dieselben weiter geführt, besonders als er seit 1851 eine Professur der „Géométrie supérieure" an der Fakultät der Wissenschaften zu Paris erhielt. Dort hat er eine grosse Zahl von Schüler um sich versammelt. Es sind aus dieser „Schule" zu nennen Laguerre, Darboux und noch manche andere verdiente Männer. Diese französische Schule hat sich nun eben je länger, je mehr zu der Ansicht durchgearbeitet, dass die metrischen Untersuchungen durchaus nicht von den projectiven auszuschliessen seien, sondern dass es sich bei ihnen vielmehr nur um eine Beziehung zu einem speciellen Kegelschnitt, dem Kugelkreise, handle. Etwa um

1860 ist diese Ansicht allgemein geworden. Damit hatten die französischen Geometer einen Vorsprung vor den deutschen, welche damals noch streng zwischen metrischen und projectiven Beziehungen schieden. Wir haben uns nun zu einem neuen Kapitel zu wenden, welches wir überschreiben können:

Kapitel II. „Cayley's Maassgeometrie."

Bereits im ersten Theil unserer Vorlesung haben wir die Namen Cayley und Sylvester zu erwähnen gehabt, als es sich darum handelte, die Invariantentheorie als eine algebraische Verallgemeinerung der projectiven Geometrie zu betrachten.

Cayley hat nun seit der Mitte der 50. Jahre begonnen, in den Philosophical Transactions eine Reihe von Abhandlungen zu veröffentlichen, in welchen er die damaligen Resultate der Invariantentheorie zusammenfasst. Es sind dies 9 Abhandlungen unter der Überschrift: „Memoirs upon Quantics"*). Gerade auf die 6. Abhandlung wollen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit richten. Dieselbe ist erschienen 1859.

In dieser 6. Abhandlung hat Cayley nun eben die Lehre von der Maassbestimmung von seinem eigenen Standpunkte aus beleuchtet. Er hat nicht gefragt, wie ordnen sich die in der Elementargeometrie gegebenen metrischen Verhältnisse in die pro-

*) „Quantic" = algebraische Form.

jective Geometrie ein, sondern er hat gleich eine allgemeine Theorie der Maassbestimmungen geschaffen, von der unsere bisher betrachteten Sätze nur specielle Fälle sind. Er hat gesagt: Möge einmal irgend ein Gebilde zweiten Grades angenommen sein, in Bezug auf dieses wollen wir nun den Begriff eines Winkels, einer Entfernung definieren und uns in die dann entstehenden neuen Verhältnisse hineindenken. Wenn man dann hinterher insbesondere den Kugelkreis als dieses fundamentale Gebilde 2ten Grades wählt, so erhalten wir unseren bekannten Fall. —

Cayley ist also weit souveräner aufgetreten als die französische Schule; er hat nicht gegebene Verhältnisse analysiert, sondern er hat sie in ein logisches System eingeordnet. Seine Betrachtungen ordnet er in 3 Theile, indem er betrachtet:

I. die Grundgebilde 1. Stufe.
II. die Grundgebilde 2. Stufe.
III. die Grundgebilde 3. Stufe.

Die ganze Theorie, wie sie sich so darbietet, wollen wir nun im Überblick kennen lernen, wobei wir uns übrigens einigermassen an die Darstellung von Bd. 4. der mathem. Annalen anlehnen.

Wir wollen nun auf Cayley's Maassgeometrie selbst eingehen.

Wir schliessen uns hierbei, um systematisch vorzugehen, der Eintheilung Cayley's an und betrachten daher zunächst:

I. Die Grundgebilde 1. Stufe.

Ein Element des Gebildes wird festgelegt durch die homogenen Coordinaten $x_1 : x_2$, mag $x_1 : x_2$ nun einen Punkt auf einer Geraden, oder einen Strahl im Büschel oder eine Ebene im Büschel bedeuten. Nun denken wir uns auf dem Grundgebilde durch eine quadratische Gleichung $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ ein fundamentales Gebilde gegeben, welches wir auch fernerhin als „absolutes Gebilde" bezeichnen wollen. Wir führen zur Abkürzung noch ein $\sum_{xx} = \sum a_{ik} x_i x_k$ und bezeichnen dementsprechend mit $\sum_{xx'} = \sum a_{ik} x_i x_k'$ die Polarenbildung von $\sum a_{ik} x_i x_k$.

Wir werden nun von vorn herein folgende verschiedenen Fälle unterscheiden dürfen:

1. Der allgemeine Fall ist der, wo die Diskriminante von $\sum_{xx} = 0$ nicht verschwindet, wo also $\sum_{xx} = 0$ zwei verschiedene Wurzeln hat. Diese Möglichkeit zerlegt sich wieder in die Unterabtheilungen:

1a. die beiden Wurzeln der Gl. $\sum_{xx} = 0$ sind konjugiert imaginär:

1b. die beiden Wurzeln sind reell.

2. Der specielle Fall zweier gleichen Wurzeln. Derselbe tritt ein, wenn die Diskriminante von $\sum_{xx} = 0$ gleich 0 wird.

Wir wollen dementsprechend gleich 3 Benennungen verabreden, wir werden reden von 1a) einer elliptischen, 1b) einer hyperbolischen, 2) einer parabolischen Maassbestimmung auf einem Grundgebilde erster Stufe. Die Bedeutung dieser Bezeichnungen ist leicht einzusehen; sie ist den Beziehungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel zur unendlich fernen Geraden entnommen. (– 2 imaginäre Schnittpunkte, 2 reelle, ein reeller Berührungspunkt. –)

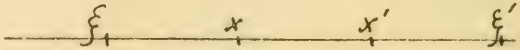
Wir wollen nun dazu übergehen, für irgend 2 Elemente X und X' unseres Grundgebildes einen Ausdruck festzulegen, den wir als den Maassunterschied derselben, bezüglich des absoluten Gebildes anzusehen haben. Wir haben das Wort „Maassunterschied" gewählt, um gemeinsam die Bezeichnungen „Entfernung zweier Punkte, Winkel zweier Strahlen oder Ebenen", [Abstand zweier Punkte, Strahlen oder Ebenen] zu umfassen. Wir bezeichnen zur Abkürzung den Maassunterschied zweier Elemente dann mit $M(XX')$.

Was wollen wir nun unter dem Maassunterschied zweier Elemente in Bezug auf das absolute Gebilde verstehen?

Wir wollen einmal ein Doppelverhältnis bilden analog dem, das wir in der letzten Stunde (pag. 5?) betrachtet haben. Der Einfachheit halber und, um eine bestimmte Vorstellung zu fixieren, wählen wir die gerade Linie als Grundgebilde. Genau dieselben Betrachtungen

gelten natürlich auch für das Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel. Es sei durch ξ und ξ' das absolute Gebilde dargestellt, x und x' seien die Elemente, deren Maassunterschied zu bestimmen ist. Das Doppelverhältnis der 4 Punkte ist dann:

$$\lambda = \frac{(x\xi)\cdot(x'\xi')}{(x\xi')\cdot(x'\xi)}.$$



Figur. 10.

Dieses Doppelverhältnis wollen wir jetzt unserer Maassbestimmung zu Grunde legen. Wir definieren als Maassunterschied zweier Elemente in Bezug auf das absolute Gebilde den log. des eben aufgestellten Doppelverhältnisses, multipliciert mit einer zunächst noch beliebigen Konstante k. Es ist also:

$$\underline{M(xx') = k.\log.D.V.}.$$

Ehe wir nun dazu übergehen, dieses Maassverhältnis in unseren 3 Fällen näher zu discutieren, wollen wir noch vorerst die Frage aufwerfen, wie wir überhaupt, von einer logischen Ueberlegung ausgehend, gerade dazu kommen, den Log. dieses Doppelverhältnisses in Betracht zu ziehen. Sollte es nicht viel näher liegen, das DV selber als das Maassverhältnis zu wählen? Es liegt dies an folgendem: Haben wir 3 Elemente, 1, 2, 3, so gilt für die bezüglichen Entfernungen in der elemen-

naren Geometrie das Gesetz, daß $(12)+(23)=(13)$ ist, d.h. in Worten: Der Maassunterschied des ersten und zweiten Elementes, vermehrt um den des zweiten und dritten ist gleich dem Maassunterschied des ersten und dritten Elementes, mögen wir nun Punkte auf einer geraden Linie, 3 Strahlen eines Büschels oder 3 Ebenen eines Büschels betrachten. Wir können diese Beziehung auch so ausdrücken:

„Maassunterschiede, wie sie in der elementaren Geometrie auf einem Gebilde 1. Stufe auftreten, haben immer die Eigenschaft der Addierbarkeit."

Diese Eigenschaft der Addierbarkeit ist also mit dem Begriff des Messens wesentlich verbunden. Wenn wir daher eine allgemeine Theorie der Maassbestimmungen aufstellen wollen, so werden wir jedenfalls an diesem Princip der Addierbarkeit festhalten müssen. Sehen wir nun einmal zu, wie sich in Bezug hierauf das Doppelverhältnis selbst verhält, indem wir einmal das DV für x, x', dann für x, x'' und x, x'' bilden. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} DV(xx')_2 &= \frac{(x\xi)\cdot(x'\xi')}{(x\xi')\cdot(x'\xi)}\,. \\ DV(x'x'')_2 &= \frac{(x'\xi)\cdot(x''\xi')}{(x'\xi')\cdot(x''\xi)}\,. \end{aligned}\right\} \quad DV(xx'')_3 = \frac{(x\xi)\cdot(x''\xi')}{(x\xi')\cdot(x''\xi)}\,.$$

Was für eine Beziehung besteht nun zwischen den 3

Doppelverhältnissen? Wir erkennen sofort ohne Rechnung, dass nicht $D_1 + D_2 = D_3$, sondern vielmehr $D_1 \cdot D_2 = D_3$ ist. Wir sehen also, dass das dritte Doppelverhältnis nicht als Summe, sondern als Produkt der beiden ersten sich ergiebt. Das DV. selbst können wir daher als Grundlage für die Maassbestimmung nicht verwerten gemäss des Princips der Addierbarkeit. Vielmehr müssen wir eine Funktion F von DV. den Maassbestimmungen zu Grunde legen, die so zu wählen ist, dass:

$$F(D_1) + F(D_2) = F(D_3) \text{ ist}$$

So verstehen wir den Satz:

Bei unserer Definition wird statt anderer Funktionen des Doppelverhältnisses gerade der log. gebraucht, weil dieser log. die Eigenschaft der Addierbarkeit besitzt, die wir für alle Maassbestimmung auf Grundgebilden erster Stufe als charakteristisch ansehen."

Wir wollen nun die analytische Formel für den so definierten Maassunterschied aufstellen: Es ist

$$M(xx') = k \log \frac{\sum xx' + \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx} \cdot \sum_{x'x'}}}{\sum_{xx'} - \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx} \sum_{x'x'}}}$$

Denn der frühere Wert des Doppelverh. für ein ternäres Gebiet, gilt auch im binären Gebiet unverändert, wenn wir $x_3 = x_3' = 0$ setzen.

Doch können wir auch, statt den log. zu gebrauchen, eine cos.- und sin.-Formel aufstellen, indem wir unter Bezugnahme auf die Ausdrücke, die wir bei der gewöhnlichen Maassbestimmung im Punkte kennen lernten, jetzt, wo k eine beliebige Constante ist, nicht cos. M und sin. M, sondern cos $\frac{iM}{2k}$ und sin. $\frac{iM}{2k}$ berechnen. Es wird:

$$\cos.\frac{iM}{2k} = \frac{\sum xx'}{\sqrt{\sum xx \cdot \sum x'x'}}.$$

$$\sin.\frac{iM}{2k} = \frac{(1'x')\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\sum xx \cdot \sum x'x'}},$$ unter Δ die Diskriminante von $\sum xx = 0$ verstanden.

Wir wollen jedoch auf diese Formeln nicht näher eingehen; wir haben sie nur der Vollständigkeit wegen angeführt, um an die Entwickelungen der vorigen Stunde zu erinnern. Jetzt wollen wir dazu übergehen, uns in die Definition des Maassunterschiedes im ersten allgemeinen Falle, dem elliptischen Falle, lebhaft hineinzudenken.

§. 1. Elliptische Maassbestimmung. Dieser Betrachtung ist bereits gut vorgebaut durch die Entwickelungen der letzten Stunde. Denn die Bestimmung des Winkels ω, den 2 Skalen miteinander bilden, ist bereits ein specieller Fall der Untersuchungen, die wir jetzt anstellen wollen. Wir dürfen von vorn-

herein sagen: „Die elliptische Maassbestimmung ist uns bereits im Beispiele bekannt, indem die gewöhnliche Winkelbestimmung im Strahlbüschel den elliptischen Charakter hat, nur dass da unsere Constante k gleich $\frac{i}{2}$ gesetzt ist und das absolute Gebilde 2. Grades vornvornherein festgelegt ist, nämlich durch die nach den Kreispunkten hingehenden Strahlen vorgestellt wird." An diesem Beispiele können wir gleich Einiges lernen:

1.) Wir werden gut thun: $k = i k'$ zu setzen, wo k' reell ist, damit nämlich reelle Elemente einen reellen Maass unterschied bekommen. Dies wird uns nicht überraschen, da wir bereits früher daran erinnert haben, dass, wenn es sich um 2 reelle und 2 konjugiert imaginäre Elemente handelt, das Doppelverhältnis derselben gleich $e^{i\varphi}$ ist, also der log. desselben, mit k multipliciert, gleich $ik\varphi$. Wenn dies aber etwas Reelles sein soll, so müssen wir $k = ik'$ nehmen.

2.) Haben wir dies eingesetzt, wie groß wird dann die ganze Länge der geraden Linie sein? Entsprechend dem Falle, dass die Winkelsumme im Strahlenbüschel gleich π ist, finden wir folgendes Ergebnis:

„Die Gesammtlänge der geraden Linie wird bei der elliptischen

Maassbestimmung endlich und zwar gleich $2k\cdot\pi$."

3.) Drittes wollen wir noch konstatieren: Da der log eine unendlich vieldeutige Function ist mit der Periode $2ki\pi$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, so ergiebt sich sofort:

„Entsprechend diesem letzten Satze ist die Entfernung zweier Punkte einer geraden Linie im elliptischen Falle eine unendlich vieldeutige Function mit der Periode $2k\pi$."

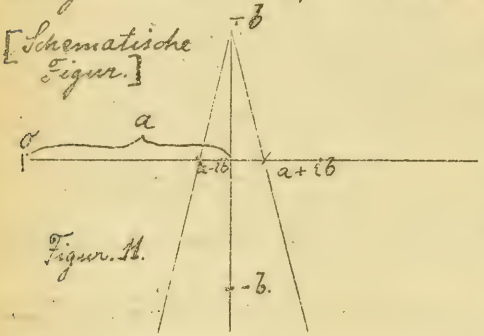
Wir wollen uns jetzt klar machen, daß jenes specielle Beispiel der elliptischen Bestimmung im Strahlbüschel uns gestattet, uns allgemein die elliptische Maassbestimmung auf der geraden Linie deutlich zu machen.

Wir betrachten $\frac{x_1}{x_2}$ als die Abscisse eines Punktes x. („Abscisse" im elementaren Sinne verstanden.) Dann können wir die beiden Wurzeln von $\Sigma_{xx'}=0$ $x=a+ib$ und $x=a-ib$. in gewöhnlicher Weise (nach Gauss) durch die Punkte der Ebene deuten, deren rechtwinklige Coordinaten $x=a$, $y=\pm b$ sind.

Nun müssen wir lernen, wie wir die Konstruktion dieser Punkte mit den imaginären Punkten $a\pm ib$ auf der geraden Linie auf die einfachste Weise in Verbindung setzen

Früher haben wir uns zu diesem Zwecke eines Kreisbüschels bedient, wodurch auf der Geraden die elliptische Involution bestimmt wurde, deren Doppelpunkte die $a \pm ib$ sind. Jetzt wollen wir einen directen Weg wählen, indem wir uns der imaginären Kreispunkte bedienen. Wir behaupten, die geraden Linien von den Gaussischen Punkten $a, \pm b$ nach den Kreispunkten schneiden die Abscissenaxe gerade in den Punkten $a \pm ib$. Es ist dies leicht nachzuweisen:

[Schematische Figur.]



Figur. 11.

$(x-a) = \lambda(y-b)$ ist die Gleichung einer beliebigen Geraden durch den Gaussischen Punkt a, b. Soll dieselbe durch den einen oder anderen Kreispunkt gehen, so muss sie erfüllt sein für $\lambda = \pm i$. Wir erhalten also: $(x-a) = \pm i(y-b)$ als die Gl. der geraden Linien nach den Kreispunkten. Um die Schnittpunkte dieser Linien mit der Abscissenaxe zu finden, setzen wir $y = 0$ und erhalten $x = a \pm ib$, wodurch unsere Behauptung bewiesen ist. Zu demselben Resultat wären wir natürlich gekommen, wenn wir vom Gaussischen Punkte $a, -b$ ausgegangen wären. Danach können wir umgekehrt jetzt die Gaussischen Bildpunkte deuten, wodurch dieselben

endgültig in die projective Geometrie eingeführt werden.

Folgendermaßen:

„Um zu 2 konjugiert imaginären Punkten einer geraden Linie die Gaussischen Bildpunkte zu construieren, werden wir die beiden imaginären Punkte mit den beiden Kreispunkten durch 4 gerade Linien verbinden, die imaginär sind, und die Gaussischen Bildungspunkte sind dann die beiden reellen Punkte, in welchen sich die genannten 4 imaginären geraden Linien, (die paarweise konjugiert sind) kreuzen."

(v. die schematische Figur 12)

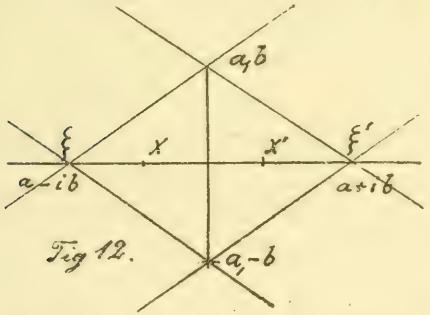


Fig 12.

Sind nun ξ und ξ' die konjugiert imaginären Punkte, die durch das absolute Gebilde $\Sigma_{xx} = 0$ definiert sind, so können wir offenbar nach dem Satze des Pappus das DV von x, x', ξ, ξ' ersetzen durch das Doppelverhältnis der 4 Strahlen, die von den Gaussischen Bildpunkten für ξ und ξ' nach den Punkten x, x' und den imaginären Kreispunkten hinlaufen. Unser $M(xx')$ ist dann gleich ik mal dem Logarithmus dieses neuen Doppelverhältnisses. Nun ist nach pag. 59. aber der Winkel der beiden reellen Strahlen, die nach

x, x' gehen, definiert durch:

$\frac{1}{2} w = \frac{i}{2} . \log . \mathfrak{D} V$, wo $\mathfrak{D} V$ dasselbe Doppelverhältnis ist.

Wir bekommen so:

$M(xx') = 2k', w$, so dass wir den Werth von $M(xx')$ in der Figur direkt aus dem Werth des Winkels w ablesen können. Wir haben so das Resultat:

„Der Maassunterschied zweier Punkte der geraden Linie im elliptischen Falle ist hiernach einfach gleich dem Produkt von $2k'$ in den Winkel, welchen im elementaren Sinne die beiden Strahlen mit einander bilden, die nach den Punkten x und x' von dem Gaussischen Bildpunkte der Fundumentalpunkte ξ, ξ' hinlaufen."

Wenn wir uns nicht so genau, aber kürzer ausdrücken wollen, so können wir auch sagen:

Die elliptische Maassbestimmung auf der geraden Linie ist einfach ein geradliniger Schnitt der gewöhnlichen Winkelbestimmung im Strahlbüschel."

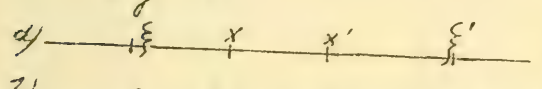
„Hierdurch wird es jetzt auch deutlich, warum die Gesammtlänge der Linie gleich $2k'\pi$ wird."

Wir gehen nun über zu der

§ 2. hyperbolischen Maassbestimmung. Es sind in diesem Falle die Wurzeln ξ, ξ' der Gl.

$\Sigma x x = 0$, die das absolute Gebilde darstellt, reell.
Wir wollen wieder den speciellen Fall der geraden Linie bevorzugen, um eine bestimmte Vorstellung zu fixieren. Unsere Resultate sind später ohne Weiteres leicht auf das Strahlbüschel und das Ebenenbüschel zu übertragen.

Fig. 13.



Wenn die Punkte x und x', deren Abstand zu bestimmen ist, durch ξ und ξ' nicht getrennt werden (v. Fig 13ª) also entweder beide ausserhalb oder beide innerhalb von ξ, ξ' liegen, so ist das unserer Definition zu Grunde liegende

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{V} = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)}$$

jedenfalls grösser als 0; sind die Punkte x und x' aber durch ξ und ξ' getrennt, so ist das $\mathfrak{D}\,\mathfrak{V}$ negativ. Diesen Umstand haben wir wohl zu beachten. Denn wenn wir jetzt den log. $\mathfrak{D}\,\mathfrak{V}$ bilden so wird derselbe im ersten Falle reell, im zweiten dagegen complex sein. Wir bestimmen, dass wenigstens im ersten Falle etwas Reelles herauskommt. Daher setzen wir k gleich einer reellen Grösse. Wir fassen dies mit den Worten zusammen:

„ k soll eine reelle Constante sein, so dass 2 Punkte

welche durch ξ und ξ' nicht getrennt werden, einen reellen Mass unterschied erhalten, zwei Punkte dagegen, welche getrennt werden allerdings einen komplexen."

Wir fügen diesem Satze noch Folgendes hinzu: Der log. ist eine unendlich vieldeutige Funktion von der Periode $2\,ki\,\pi$; also hat auch unser Maassunterschied die Periode $2\,ki\,\pi$. Es folgt hieraus sofort:

"Indem wir den Maassunterschied zweier Punkte x und x' desselben Segmentes als eine reelle Grösse bezeichnen, ist er dadurch eindeutig festgelegt, denn er könnte nur um reelle Multipla von $2i\pi$ verändert werden."

Hierin beruht, wie man sieht, ein wesentlicher Unterschied gegen die elliptische Maass bestimmung, deren Periode eine reelle ist.

Wir fragen nun weiter, welche Entfernung hat der Punkt ξ oder ξ' von x? Lassen wir x' nach ξ wandern, so erhalten wir.

$$\mathfrak{D}\,V = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)} = \infty.$$ Wandert andererseits x' nach ξ', so werden wir erhalten.

$$\mathfrak{D}\,V = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)} = 0.$$

Wenn wir nun den log. $\mathfrak{D}\,V$ bilden, so sehen wir, daß dieser im ersten Falle gleich $+\infty$, im zweiten gleich $-\infty$ wird. Da zur Bildung des Maassunterschiedes der log. $\mathfrak{D}\,V$ nur noch

mit der reellen Konstanten k multipliziert wird, so haben wir das Resultat:

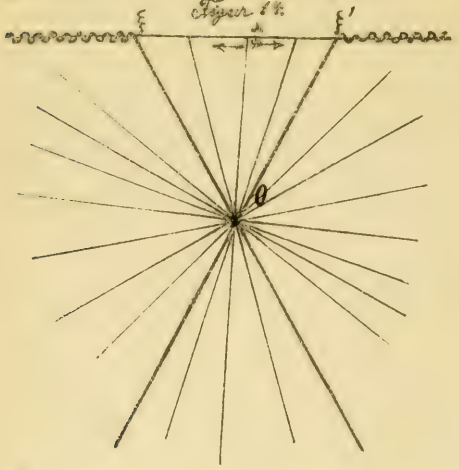
„Unsere gerade Linie trägt jetzt 2 unendlich ferne Punkte, nämlich die Punkte ξ und ξ' haben eine ∞ grosse Entfernung vom beliebig gewählten Punkte x."

Nun wollen wir uns diese hyperbolische Maassbestimmung noch näher führen, indem wir uns vorstellen, dass wir uns etwa in der Mitte von ξ ξ' befänden und von hier aus nach dem Punkte ξ oder ξ' uns hinbewegten, doch so, dass wir in gleichen Zeiten hyperbolisch gleiche Strecken durchliefen. Um dann bis zu den Punkten ξ oder ξ' zu kommen, hätten wir eine unendlich grosse Wegstrecke zurückzulegen, wozu auch eine unendlich lange Zeit erforderlich wäre. Wir erkennen daher:

Wenn wir uns von einem Punkte des Segmentes ξ ξ' nach beiden Seiten hin mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen können, Geschwindigkeit im Sinne der hyperbolischen Maassbestimmung verstanden, so werden uns nur die sämmtlichen Punkte des genannten Segmentes erreichbar sein, die Punkte ξ ξ' aber werden eine unerreichbare Grenze vorstellen, und das darüber hinaus liegende Stück der geraden Linie wird als ein ideales, für die Bewegung durchaus nicht in Betracht kommendes Stück der geraden Linie zu

bezeichnen sein." (v. Figur 14.)

Figur 14.



Ein entsprechendes Ergebnis gilt für das Strahlbüschel, auf dem wir eine hyperbolische Maassbestimmung ins Auge fassen. Wenn wir uns dort, etwa im Punkte O stehend, im Sinne der hyperbolischen Maassbestimmung mit constanter Winkelgeschwindigkeit im einen oder anderen Sinne drehen, so werden wir die Richtung der Grenzstrahlen nie erreichen, trotzdem wir uns immer in demselben Sinne weiterbewegen, alle Strahlen darüber hinaus aber würden für uns durchaus ideal, imaginär (dies Wort nicht im spez. mathematischen Sinne gedacht) sein.

Wir wollen nun weiter betrachten:

2. die parabolische Maassbestimmung. Das zu Grunde liegende absolute Gebilde $\Sigma_{xx} = 0$ liefert zwei gleiche Wurzeln, es besteht daher in nur einem, jedoch doppelt zählenden Element des Grundgebildes. Wir bevorzugen wieder der bestimmten Ausdrucksweise halber die gerade Linie. Da die Punkte ξ und ξ' zusammengefallen sind, so wird unser fundamentales Doppelverhältnis:

$$DV = \frac{(x\,\xi)(x'\,\xi')}{(x\,\xi')(x'\,\xi)} = 1$$ werden, es sei denn, daß

ausserdem auch x oder x' ebenfalls mit ξ zusammenfiele. Im letzteren Falle würden wir erhalten: $DV = \frac{0}{0}$, d.h. wir können dem Doppelverhältnis jeden beliebigen Wert erteilen. Es folgt unmittelbar:

„Im parabolischen Falle wird, so fern wir die allgemeine Formel aufrecht erhalten wollen, der Abstand irgend zweier Punkte gleich 0, es sei denn, dass der eine oder der andere Punkt in den Fundamentalpunkt selbst hineinfällt, worauf der Abstand eine unbestimmte Grösse wird."

Wir sehen: mit einer solchen Maassbestimmung, wo alle Strecken gleich 0 oder unbestimmt werden, ist nichts anzufangen. Versuchen wir einmal, ob wir mehr Vernunft hineinbringen durch einen Grenzübergang. Wir werden zunächst den Punkt ξ' noch unendlich wenig von ξ verschieden sein lassen. Wir setzen daher: $\xi' = \xi + \varepsilon \xi_1$, d.h. ausführlich geschrieben:

$$\xi_1' = \xi_1 + \varepsilon \cdot \xi_1$$
$$\xi_2' = \xi_2 + \varepsilon \cdot \xi_2,$$

unter ε eine ∞ kleine Grösse verstanden. ξ_1, ξ_2 werden wir als die Coordinaten eines beliebig angenommenen Punktes ansehen können.

Gleichzeitig wollen wir jedoch jetzt die Konstante k unendlich werden lassen; wir setzen $k = \frac{l}{\varepsilon}$, wo l eine endliche Grösse ist. Der Zweck dieser Festsetzungen ist, wie leicht voraus-

zusehen, folgender:

„Bei der Definition der parabolischen Maass bestimmung wollen wir jetzt von der ursprünglichen Definition abgehen und dafür anwenden den Grenzwerth:

$$M(x\,x') = \lim.\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\log.\mathfrak{D}\,\mathfrak{V}(x,\xi,x',\xi+\varepsilon\,\xi')\right), \text{ für } \varepsilon = 0.$$

Wir führen wir diesen Grenzübergang nun nach den Regeln der Analysis aus:

Aus dem $\mathfrak{D}\,\mathfrak{V} = \dfrac{(x\,\xi)\,(x'\xi')}{(x\,\xi')\,(x'\,\xi)}$ wird zunächst, wenn wir für ξ' einsetzen $\xi + \varepsilon\,\xi$:

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{V} = \frac{(x\xi)\cdot[(x'\xi)+\varepsilon(x'\,\xi)]}{[(x\xi)+\varepsilon(x\,\xi)]\cdot(x'\xi)},$$ oder wenn wir Zähler und Nenner durch die allein stehenden Determinanten dividieren: $\mathfrak{D}\,\mathfrak{V} = \dfrac{\left[1+\varepsilon\,\frac{(x'\,\xi)}{(x'\,\xi)}\right]}{\left[1+\varepsilon\cdot\frac{(x\,\xi)}{(x\,\xi)}\right]}$. Bis hierher ist noch nichts vernachlässigt, doch wollen wir jetzt den Nenner nach Potenzen entwickeln und bei dem ersten Gliede abbrechen. Wir erhalten:

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{V} = \left(1+\varepsilon\,\frac{(x'\xi)}{(x'\,\xi)}\right)\cdot\left(1-\varepsilon\,\frac{(x\,\xi)}{(x\,\xi)}-\ldots\ldots\right)$$

$$= 1+\varepsilon\left(\frac{(x'\xi)}{(x'\,\xi)}-\frac{(x\,\xi)}{(x\,\xi)}\right)+\ldots\ldots$$

Wir haben bei dieser Rechnung nur die unendlich kleinen Glieder zweiter und höherer Ordnung fortgelassen.

Es giebt uns also $1+\varepsilon\left(\frac{(x'\xi)}{(x'\,\xi)}-\frac{(x\,\xi)}{(x\,\xi)}\right)$ einen angenäherten Werth des Doppelverhältnisses.

Bilden wir nun den Logarithmus des DV. Da $\log.(1+a) = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \mp \ldots\ldots$ ist, so erhalten wir, wenn wir uns wieder auf Glieder erster Ordnung beschränken:

$\log. DV = \varepsilon\left(\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right)$. Wenn nun ε zu 0 wird, d.h. wenn wir den Punkt $\xi' = \xi + \varepsilon\xi$ mit dem Punkte ξ zusammenfallen lassen, so wird auch der $\log. DV$ gleich 0, was ja an sich völlig richtig ist; doch ehe wir $\varepsilon = 0$ setzen, multiplizieren wir den log. mit der Konstanten $k = \frac{l}{\varepsilon}$, die in demselben Maasse unendlich groß wird, als die zu multiplizierende Größe unendlich klein wird. In dem Produkt fällt dann das ε heraus, und wir erhalten also den Grenzwert des Maassunterschiedes:

$M(xx') = k.\log. DV = \left[\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right].l$. Unser Resultat des Grenzübergangs ist dann:

„Als den Maassunterschied $M(xx')$ definieren wir im parabolischen Falle den Ausdruck:

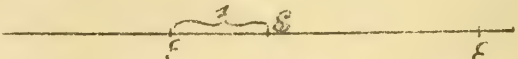
$$M(xx') = \left[\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right].l.$$

Wir wollen nun noch den Faktor l dadurch festlegen, daß wir einen Punkt ε annehmen, der von ξ den Abstand 1 haben möge. Wir führen mit anderen Worten eine Längeneinheit ein, ein Schritt, der im elliptischen oder hyperbolischen

83306

nicht nötig war. *) Wir wollen übrigens bemerken, dass wir die Punkte ξ, ε, ξ bezw. den Nullpunkt, den Einheitspunkt, den Unendlichkeitspunkt der Maassbestimmung nennen können. Setzen wir nun für x und x' entspr. ξ und ε in unsere Formel ein, so wird der Abstand 1:

Figur 15.



$$1 = \left[\frac{(\varepsilon\,\xi)}{(\varepsilon\,\xi)} - 0\right] \cdot \lambda, \text{ woraus sich } \lambda = \frac{(\varepsilon\,\xi)}{(\varepsilon\,\xi)} \text{ ergibt.}$$

Unter Benutzung dieser Substitution geht dann der Ausdruck für den Maassunterschied über in:

$$\mathfrak{M}(x\,x') = \frac{(x'\xi)(\varepsilon\,\xi)}{(x'\xi)(\varepsilon\,\xi)} - \frac{(x\,\xi)(\varepsilon\,\xi)}{(x\,\xi)(\varepsilon\,\xi)}$$

Da jedes Glied rechts für sich ein Doppelverhältnis darstellt, so können wir schliesslich schreiben:

$$\mathfrak{M}(x\,x') = (x'; \xi, \varepsilon, \xi) - (x; \xi, \varepsilon, \xi).$$

In Worten lautet dieses Ergebnis:

„Der Maassunterschied von x und x' erscheint als die Differenz zweier Doppelverhältnisse, von denen das eine nur das x' enthält und ausserdem den Nullpunkt, Einheitspunkt und Unendlichkeitspunkt, das andere aber gerade so den Punkt x enthält und wieder den Nullpunkt, Einheitspunkt u. Unendlichkeitspunkt.“

*) weil bei ihnen der Ausdruck des Maassunterschiedes in sämmtlichen Reihen in Betracht kommender Punktcoordinaten von vorneherein homogen nullter Dimension war.

Wir sind so zu einer Maassbestimmung geführt, die der gewöhnlichen Euklidischen ganz ähnlich ist. Wir können ja, was man im gewöhnlichen Sinne x nennt, auch schreiben: $(x, 0, 1, \infty)$, so dass der Abstand zweier Punkte der Abscissenaxe in der elementaren Geometrie, nämlich $x - x'$, gleich der Differenz zweier Doppelverhältnisse wird, ganz analog wie das M der parabolischen Maassbestimmung.

„Das gewöhnliche Maasssystem der geraden Linie, wie wir es in der elementaren oder Euklidischen Geometrie handhaben, ist daher ein specieller Fall der parabolischen Maassbestimmung, die wir hier betrachten." Wir erkennen sofort auch die Richtigkeit des Satzes: „Der Maassunterschied im parabolischen Falle ist eine rationale Funktion der Coordinaten, daher durchaus eindeutig, überdies gibt es jetzt nur ein unendlich fernes Element X oder $X' = \xi$."

Hiermit wollen wir die Betrachtung der 3 Fälle der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Maassbestimmung schliessen.

Anmerkung: Auch dem Euklidischen System messen wir auf die geraden Linie parabolisch. Für eine solche fallen, wie wir gerade sahen, ξ und ξ' zusammen und k ist ∞ zu nehmen. Wenn wir jedoch die Fundamentalpunkte ganz wenig von einander verschieden sein lassen, wobei ξ und ξ' nach Belieben reell oder konjugirt imaginär sein mögen, und wenn wir ferner k noch nicht ∞ wohl aber sehr gross $= \frac{1}{\varepsilon}$ sein lassen, so haben wir eine hyperbolische bezw.

elliptische Maassbestimmung, die ein Stück lang von einer parabolischen Maassbestimmung nur unmerklich verschieden ist. Ist es nun wohl denkbar, daß unser gewöhnliches Messen auf der geraden Linie, welches doch nie über eine gewisse endliche Längenausdehnung hinausgeführt, nur scheinbar den parabolischen Charakter besäße, in Wirklichkeit aber hyperbolisch oder auch elliptisch wäre? Wir werfen diese Frage hier nur ganz vorläufig auf.

Wir betrachten jetzt weitergehend:

II. die Grundgebilde II. Stufe. Wie wir im binären Gebiet unseren Untersuchungen zunächst die gerade Linie zu Grunde gelegt hatten, so werden wir jetzt der bestimmteren Ausdrucksweise halber die Ebene bevorzugen. Unsere betreffenden Resultate lassen sich dann später natürlich ohne Weiteres auf die Geometrie im Raume übertragen. Es sei durch $\sum x_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ ein Kegelschnitt dargestellt, der in Linienkoordinaten durch $\sum \lambda_{ik}\, u_i\, u_k = 0$ gegeben ist. Wir nennen denselben den „absoluten Kegelschnitt" und wollen in Rücksicht auf ihn die allgemeine Maassbestimmung in der Ebene aufbauen.

Je nach der speciellen Art des absoluten Kegelschnittes werden wir 7 Arten der Maassbestimmung auseinander zu halten haben.

Es kann nämlich zunächst der Kegelschnitt:

1. ein allgemeiner Kegelschnitt sein.

2. entweder als Punkt- oder als Tangentengebilde einfach

spezialisiert sein.

3. sowohl als Punkt- wie als Tangentengebilde zweifach spezialisiert sein.

Die weitere Einteilung dieser 3 Hauptfälle in Unterabteilungen erfolgt durch Rücksichten auf die Verhältnisse im Reellen und wird folgende Zusammenstellung geben:

1. Ein allgemeiner Kegelschnitt.

1a. Derselbe ist nullteilig

1b. Derselbe ist einteilig

2. Ein entweder in Punktcoordinaten oder in Liniencoordinaten einfach spezialisierter Kegelschnitt.

2'. Ein Linienpaar, das uns zugleich als seinen Schnitt einen Doppelpunkt liefert, und zwar:

2'a.) Die Linien des Paares sind konjugiert imaginär;

2'b.) Die Linien sind reell.

Der Doppelpunkt ist natürlich in beiden Fällen reell.

2".) Ein Punktpaar, das uns zugleich als seine Verbindende eine Doppelgerade liefert, und zwar:

2"a.) Die Punkte des Paares sind konjugiert imaginär.

2"b.) Dieselben sind reell.

Die Doppelgerade ist wieder in beiden Fällen reell.

3. Ein sowohl in Punktcoordinaten, wie in Liniencoordinaten zweifach spezialisiertes Gebilde. Dasselbe besteht in einer

Doppelgeraden und einem Doppelpunkt. Beide sind reell voraus zu setzen, da sie ja einzeln, wenn auch doppeltzählend auftreten.

Bemerkung ad 3. Dieser Fall 3 bietet z. B. ein, wenn eine Ellipse nach irgend einem Gesetze unendlich flach, zugleich aber auch unendlich klein wird, so daß also die kleine Axe nochunendlich klein gegen die grosse Axe wird. Erstere wird daher unendlich klein von einer höheren Ordnung werden müssen, als die letztere.

Wir wollen jedoch die 3 verschiedenen Fälle nicht alle einzeln betrachten, vielmehr wollen wir uns der Kürze halber beschränken auf die 2 Fälle, wo der „absolute Kegelschnitt" in einem nulteiligen (2ª) oder in einem einteiligen (1ᵇ) Kegelschnitt oder in 2 konjugiert imaginären Punkten (2ᵇa) besteht. An diesen letzten Fall sind wir bereits gewöhnt von der Euklidischen Geometrie her. Als „absolutes Gebilde" erscheinen bekanntlich in derselben die beiden imaginären Kreispunkte, deren in Punktcoordinaten die doppelt zählende unendlich ferne Gerade entspricht.

Wenn wir nun diese 3 Fälle weiterhin besonders betrachten, und als elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Fall unterscheiden, so sei daran erinnert, daß das Paar der Kreispunkte oder überhaupt ein Paar imaginärer Punkte einen Übergangsfall bedeutet zwischen einem nulteiligen und einem einteiligen Kegelschnitt." Speziell sahen wir, daß die Kreispunkte den Übergang zwischen Kreisen mit reellem Radius zu solchen

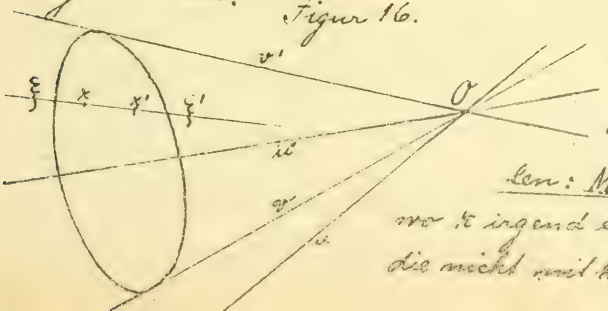
mit imaginärem Radius vermitteln. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Massunterschiede selber zu definieren. Um eine bessere Anschauung zu gewinnen, sei der „absolute Kegelschnitt" als ein reeller gezeichnet. Was wollen wir nun allgemein in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt unter dem Abstand zweier Punkte x und x' verstehen?

Durch x, x' wird eine gerade Punktreihe festgelegt, die den Kegelschnitt in den Punkten ξ und ξ' schneidet. Wir wollen dann, wie wir es in der letzten Stunde gelernt haben, als den Massunterschied der Punkte xx' bezeichnen:

$M(xx') = k \log.(x, \xi, x', \xi')$, wo k eine beliebige Konstante sein möge. Es ist dies genau die Definition für den Abstand zweier Punkte im binären Gebiet (pag 66), die wir hier nur auf das ternäre Gebiet verallgemeinert haben.

In analoger Weise legen wir den Winkel fest, den zwei gerade Linien u und u' mit einander bilden. Dem Strahlenbüschel, dessen Träger der Schnitt von u und u' ist, gehören stets die zwei Tangenten v und v' an, die man von O aus an den Kegelschnitt legen kann.

Figur 16.



Wir definieren dann als den Massunterschied zweier Strahlen: $M(uu') = \varkappa \log(u, v, u', v')$, wo $\varkappa$ irgend eine Konstante bezeichnen möge, die nicht mit k identisch zu sein braucht.

Diese Definition werden wir nun in den 3 Fällen, die wir behandeln wollen, näher zu betrachten haben.

Wir wenden uns daher zunächst zu

1. der elliptischen Massbestimmung, bei welcher das absolute Gebilde ein nullteiliger Kegelschnitt ist.

Es ist hier natürlich nichts speciell an eine Ellipse zu denken, sondern der Ausdruck „elliptisch" bezeichnet, wie früher, nur, dass die Schnittpunkte $E E'$ der in Betracht zu ziehenden Punktreihe oder die Tangenten $v v'$ des in Betracht zu ziehenden Strahlbüschels konjugiert imaginär sind, so dass auch das bei der Definition von M oder M zu Grunde liegende Doppelverhältnis imaginär wird. Wir können zusammenfassend gleich sagen:

Ist der absolute Kegelschnitt nullteilig, so erhalten wir auf jeder reellen geraden Linie und auf jedem reellen Büschel der Ebene eine elliptische Massbestimmung."

Dies führt uns insbesondere sogleich dazu, für k einzusetzen $k' \cdot i$, wo k' reell ist, damit reelle Elemente eine reelle Entfernung oder einen reellen Winkel bekommen. Wir können dann sofort den Satz aufstellen:

„Jede gerade Linie der Ebene hat eine endliche Länge $= 2\pi k'$, und jedes Büschel der Ebene hat eine endliche Büschelsumme gleich $2k'\pi$." Ausdrücklich fügen wir noch hinzu: „Reelle unendlich weite Elemente giebt es nicht (weder Punkte noch Linien).

Wir wollen die Verhältnisse nun noch etwas klarer machen.

indem wir unseren mittleren Kegelschnitt auf sein Polardreieck beziehen. Dann wird seine Gleichung zunächst die Form annehmen müssen: $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$.

Durch passende Wahl des Einheitspunktes können wir es jedoch, da a_{11}, a_{22}, a_{33} in unserem Falle dasselbe Vorzeichen haben müssen, stets erreichen, dass unser absoluter Kegelschnitt die Gleichung hat: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in Punktcoordinaten oder

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \text{ in Liniencoordinaten.}$$

Wenn wir dann die Maassunterschiede M und M in Bezug auf diesen Kegelschnitt bestimmen, so wird das ihnen zu Grunde liegende Doppelverhältnis genau die Gestalt annehmen, die wir auf pag. 58, bei der Betrachtung der Euklidischen Maassbestimmung im Punkte kennen gelernt haben. Denn ob wir sagen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ giebt den absoluten Kegel, in Bezug auf den wir das in dem Maassunterschied zweier gegebenen Punkten x und x' vorkommende DV. bestimmen, oder ob wir in $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ unseren absoluten Kegelschnitt sehen, in Bezug auf den wir das in dem Maassunterschied zweier Punkte x und x' vorkommende DV. aufstellen wollen, ist für die Rechnung ganz gleich. Es ergiebt sich in beiden Fällen derselbe Ausdruck für das DV. Wollen wir auch noch für M, bezw. M eine cos.- und sin.-Formel aufstellen, so nehmen dieselben eine ganz ähnliche Gestalt an, wie die entsprechenden Formeln auf pag. 58. Denn es gilt allgemein der Satz:

Die Formeln für M und M werden bei Zugrundelegung des

Polardreiecks ganz genau dieselben, welche wir für die Maassbestimmung im Punkte in der Euklidischen Geometrie kennen, nur dass im letzteren Falle an Stelle von k' und κ' der Zahlenfactor $1/2$ getreten ist."

Wir wollen unsere früheren Formeln einmal gemäss dieses Satzes modificieren. Wir bekommen:

$$\frac{M}{2k'} = \frac{i}{2} \log. \sqrt{\frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}},$$

$$\frac{M}{2k'} = \frac{i}{2} \log. \sqrt{\frac{\Sigma_{uu'} + \sqrt{\Sigma^2_{uu'} - \Sigma_{uu'} \Sigma_{u'u'}}}{\Sigma_{uu'} - \sqrt{\Sigma^2_{uu'} - \Sigma_{uu} \cdot \Sigma_{u'u'}}}}.$$

Nun wollen wir uns z. B. ein Dreieck konstruiren und seine 3 Seiten M_1, M_2, M_3, und seine 3 Winkel M_1, M_2, M_3 in Betracht ziehen. Wir fragen uns, was für Identitäten bestehen zwischen diesen 6 Grössen oder mit anderen Worten, was für eine Art Trigonometrie gilt bei elliptischer Maassbestimmung? Sowie wir statt $M_1\ M_2\ M_3$ und $M_1\ M_2\ M_3$ die Quotienten $\frac{M_1}{2k'}\ \frac{M_2}{2k'}\ \frac{M_3}{2k'}$ und $\frac{M_1}{2k'}\ \frac{M_2}{2k'}\ \frac{M_3}{2k'}$ in Betracht ziehen, so werden in Folge des letzten Satzes dies Seiten und Winkel sein, die ebenfalls in einem sphaerischen Dreiecke auf einer Kugel vom Radius 1 vorkommen können. Wir können daher setzen:

$$\frac{M_1}{2k'} = a; \quad \frac{M_2}{2k'} = b; \quad \frac{M_3}{2k'} = c;$$

$$\frac{M_1}{2k'} = \alpha; \quad \frac{M_2}{2k'} = \beta; \quad \frac{M_3}{2k'} = \gamma; \text{ wo } a, b, c;$$

a, β, γ die Seiten und Winkel eines sphaerischen Dreiecks

bezeichnen mögen. Wir haben so gefunden:

„Man erhält die trigonometrischen Formeln für die elliptische Geometrie der Ebene, wenn man in die Formeln der sphaerischen Trigonometrie für a, b, c, α, β, γ bezw ein-setzt: $\frac{M_1}{2k'}, \frac{M_2}{2k'}, \frac{M_3}{2k'}; \frac{M_1}{2k'}, \frac{M_2}{2k'}, \frac{M_3}{2k'}$."

Setzen wir nun gar den Radius der Kugel gleich $2k'$, so haben wir, wie leicht ersichtlich, eine noch grössere Übereinstimmung unserer Formeln mit denen der sphaerischen Geometrie auf dieser Kugel. Speciell können wir daher das elliptische Messen auf der Ebene, sobald wir $2k'$ insbesondere gleich 1 nehmen, wie fortan geschehen soll, mit dem Messen auf der Kugel mit dem Radius $R = 2k'$ vergleichen.

Doch stimmt darum die elliptische Geometrie in der Ebene ganz genau überein mit der sphaerischen Geometrie? Keineswegs. Eigentlich sollten wir ja der Grundauffassung der projectiven Geometrie entsprechend die Ebene gar nicht vergleichen mit der Oberfläche der Kugel, sondern mit dem Strahlen- und Ebenenbündel, dessen Träger der Mittelpunkt der Kugel ist. Denn:

„Wenn wir die Geometrie der Ebene hier mit der sphaerischen Geometrie verglichen haben, so dürfen wir den Unterschied nicht vergessen, der sich darin ausspricht, daß 2 gerade Linien der Ebene sich in nur einem Punkte schneiden, 2 grösste Kreise der Kugel aber in 2 Punkten."

„Ebene und Kugel sind eben ein-zweideutig auf einander bezogen."

Dies gibt uns z.B. auch den Grund dafür an, dass die Länge der geraden Linien in der Ebene elliptisch gemessen gleich $2k'\pi$ ist, während ein grösster Kreis auf der Kugel vom Radius $2k'$ die Doppelte Länge $4k'\pi$ hat. Trotzdem ist es sehr möglich, den Vergleich zwischen Ebene und Kugel weiter zu verfolgen. Wir finden z.B. so:

Wir wissen der Gesammtinhalt der Kugelfläche ist gleich $4\pi.(4k'^2)$. Was wird nun der Gesammtinhalt J unserer Ebene nach elliptischer Massbestimmung sein? Wir erkennen sofort, da die Ebene ja eigentlich nur der Halbkugel entspricht:

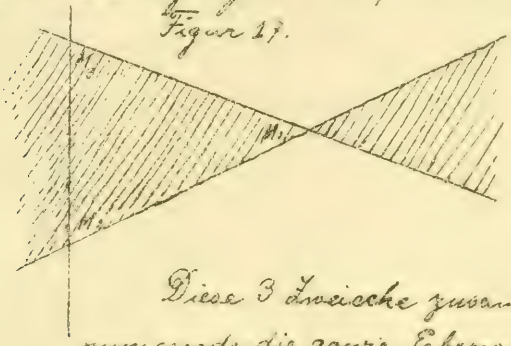
„Der Gesammtinhalt J der Ebene bei elliptischer Massbestimmung ist ein endlicher, er ist gleich $8\pi.k'^2$, also halb so groß als der Gesammtinhalt der Vollkugel."

Nun können wir daran anknüpfend auch leicht eine Formel für den Inhalt eines Dreiecks in unserer Ebene ableiten.

Wir wollen, wie wir schon oben beiläufig verabredeten, der Einfachheit halber $k'=\frac{1}{2}$ setzen, damit der Winkel des Gesammtbüschels gleich π ist, wie es ja auch auf der Kugel gewöhnlich angenommen wird. Entsprechend der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie werden wir dann $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-\pi$ als den „Excess unseres Dreiecks" bezeichnen. Wir wollen nun sehen, ob wir mit Hülfe dieses Excesses den Inhalt des Dreiecks festlegen können in derselben Weise, wie man es auf der Kugel macht. Wir ziehen die Strahlen, welche die Seiten des Dreiecks bilden, aus. Wir haben dann zunächst ein Zweieck, das

begrenzt wird von den Schenkeln des Winkels M_1 (s. Fig.). Der Inhalt derselben ist gleich $\frac{M_1}{\pi} \cdot F$, denn derselbe verhält sich zu der ganzen Ebene, wie $4M_1 : \pi$.

Figur 17.



Analog haben die von den Schenkeln der Winkel M_2 und M_3 eingeschlossenen Zweiecke den Inhalt $\frac{M_2}{\pi} \cdot F$ und $\frac{M_3}{\pi} \cdot F$.

Diese 3 Zweiecke zusammengenommen überdecken nun gerade die ganze Ebene einmal, ausserdem aber noch das gegebene Dreieck zweimal. Es ergiebt sich daher einfach:

$$\frac{M_1}{\pi} + \frac{M_2}{\pi} + \frac{M_3}{\pi} = F + 2\Delta. \text{ Hieraus ergiebt sich:}$$

$$\Delta = \frac{F(M_1 + M_2 + M_3 - \pi)}{2\pi} \quad \text{oder wenn wir}$$

für F seinen Wert setzen:

$$\Delta = 4k^2(M_1 + M_2 + M_3 - \pi). \text{ In Worten lautet}$$

dieses Resultat also:

Ein ebenes Dreieck hat in elliptischem Masse bestimmt einen positiven Excess (d.h. seine Winkelsumme ist grösser als π), und es bestimmt sich der Inhalt des ebenen Dreiecks durch die Formel $\Delta = 4k^2$ mal dem Excess." Das ist dieselbe Formel, welche die sphärische Geometrie für das sphärische Dreieck auf der Kugel vom Radius k aufstellte.

Wollen wir diese ganzen Entwickelungen nun in noch etwas lebendigere Beziehung zur sphärischen Trigonometrie setzen, so werden wir dies dadurch erreichen, daß wir unseren nullteiligen Kegelschnitt speciell als nullteiligen Kreis voraussetzen. Wenn x, y, t die homogenen Coordinaten unserer Ebene sind, so wollen wir jetzt einmal $x^2+y^2+4k'^2t^2=0$ als absoluten Kegelschnitt einführen. Dies stellt bekanntlich einen nullteiligen Kreis vom Radius $2k'i$ vor.

Einen solchen Kreis kann man in folgender Weise in eine einfache Abhängigkeit vom gewöhnlichen Kugelkreis der unendlich fernen Ebene setzen: (wie wir dies schon gelegentlich vor Weihnachten hatten.) Wir legen uns in den Raumpunkt $x=0, y=0, \frac{z}{t}=2k'$. Wenn wir von diesem Raumpunkt aus im Sinne der euklidischen Geometrie den absoluten Kegel gelegt denken, so ist die Gl. desselben: $x^2+y^2+(z-2k't)^2=0$. Wenn wir nun diesen Kegel mit der Ebene $z=0$ schneiden, so bekommen wir in der xy-Ebene genau den nullteiligen Kreis, den wir der elliptischen Maassbestimmung in dieser Ebene zu Grunde legen wollten, so daß wir zunächst den bereits im 1. Teil zur Sprache gebrachten Satz zu merken haben:

„Der nullteilige Kreis unserer Ebene erscheint als Schnitt desjenigen Kegels, der vom Raumpunkt $x=0, y=0, \frac{z}{t}=2k'$ aus sich nach dem Kugelkreis erstreckt."

Wir haben so unsere Ebene in projective Beziehung gesetzt zu den Grundgebilden im Raumpunkte $x=0, y=0, z=2k't$.

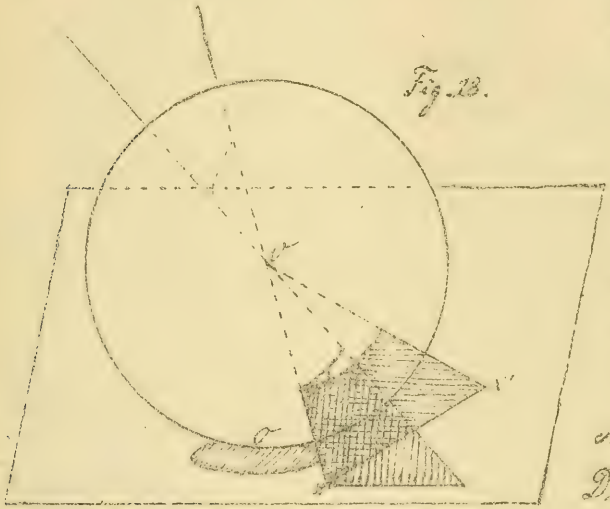
Die elliptische Maassbestimmung, welche sich in der Ebene auf unserem absoluten Kegelschnitt gründen läßt, ist daher von den Konstanten k' und K' abgesehen ein einfacher Schnitt der gewöhnlichen Maassbestimmung, die wir für die Strahlen und Ebenen dieses gewöhnlichen Raumpunktes aufstellen können."

Wir wollen nun unsere bisherige Konstruktion noch dadurch vervollständigen, daß wir um den Punkt $x=0, y=0, \frac{z}{\tau}=2k'$ eine Kugel vom Radius $2k'$ legen. Dieselbe wird unsere Ebene im Punkte $x=0, y=0$ berühren. Die elementare Geometrie dieser Kugel, die wir durch Centralprojection vom Mittelpunkte aus auf die Ebene beziehen, wollen wir dann vergleichen mit der elliptischen Geometrie der Ebene. Wir sehen zunächst sofort, die charakteristischen Maassverhältnisse in beiden werden immer dieselben sein. Haben nämlich 4 Punkte in der Ebene den Abstand $M(xx') = k' i \log. D$, so ist der Abstand der entsprechenden Punkte auf der Kugel, die man als Schnittpunkte der Verbindungslinien von O mit den Punkten xx' erhält, gleich $R \cdot \frac{i}{2} \log. D$, wo R gleich $2k'$ zu setzen ist und die Doppelverhältnisse in beiden Räumen dieselben sind. Ebenso wird sich, da wir verabredetermaßen $K' = \frac{i}{2}$ nehmen, der Ausdruck für den Winkel zweier Strahlen u und u': $M(uu') = \frac{i}{2} \log. D$ ohne Weiteres auf den Winkel auf der Kugel übertragen, welchen die beiden größten Kreise mit einander bilden, die sich als Schnitte der die Geraden u und u' von O aus projicirenden Ebenen mit der Kugelfläche ergeben. Allgemein erhalten wir daher, indem wir

jetzt von den auf pag. 91. betonten Unterschieden absehen, das Resultat:

Sobald wir für die elliptische Maassbestimmung in der Ebene auch $k = \frac{i}{0}$ nehmen, ist die elliptische Maassbestimmung in der Ebene genau dieselbe wie die gewöhnliche Maassbestimmung auf unserer Hilfskugel."

Fig. 13.



Wir wollen daran beiläufig folgende Betrachtung knüpfen.

Wenn k' grösser wird so wird auch die Hilfskugel grösser und grösser und schmiegt sich immer mehr der Ebene in der Nähe des Nullpunktes an. Diese Tatsache gestattet uns sofort den Satz aus zusprechen.

" Wenn k' grösser und grösser wird, nähert sich die für die Ebene gebrauchte elliptische Maassbestimmung, sofern wir uns auf einen kleinen Bereich von den Coordinatenanfangspunkt beschränken, immer mehr der gewöhnlichen Maassbestimmung und fällt für $k' = \infty$ geradezu mit ihr zusammen."

Ausdrücklich wollen wir jedoch darauf hinweisen,

dass so lange $k' < \infty$ ist, nur für die nächste Umgebung der Nullstelle die angenäherte Identität der elliptischen Maassbestimmung mit der gewöhnlichen besteht, der Art, dass die Differenzen beider innerhalb der Grenzen unserer Konstruktion bleiben, darüber hinaus wachsen die Differenzen schliesslich über jedes Maass.

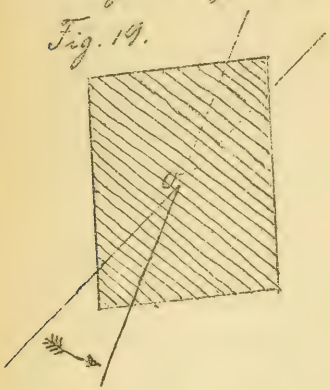
Nun wollen wir den bereits besprochenen Unterschied der elliptischen Geometrie der Ebene und der gewöhnlichen Geometrie auf der Kugel, welcher wegen der Ein-Zweideutigkeit der Beziehung beider Gebilde statt hat, noch näher betrachten. Diese Eingzweideutigkeit der Beziehung wird gewisse Abweichungen der ebenen und sphaerischen Geometrie bedingen.

„Beispielsweise schneiden sich 2 grösste Kreise der Kugel in 2 Punkten, 2 gerade Linien auf der Ebene nur in einem, und es wird ferner die Kugel durch einen grössten Kreis in 2 Hälften zerlegt, die Ebene durch die gerade Linie nicht."

Es ist vielleicht gut, diese letzte Behauptung durch das von O auslaufende Strahlenbündel deutlich zu machen. Wenn wir in dem Strahlenbündel eine Ebene festlegen, so wird das Bündel hierdurch noch nicht in 2 Hälften gelegt, vielmehr kann immer noch jeder Strahl in einen beliebigen anderen übergeführt werden, ohne die festgelegte Ebene zu durchkreuzen. Dagegen findet diese Eigenschaft nicht mehr statt, wenn nur Halbstrahlen in Betracht ziehen. Denn man kann einen Halbstrahl, der auf der einen Seite der Ebene liegt, nie mit einem zweiten der anderen Seite zur

Deckung bringen, ohne die Ebene zu durchkreuzen. Dieser Unterschied zwischen dem Büschel der Vollstrahlen und dem Büschel der Halbstrahlen ist genau derselbe, wie zwischen der Ebene und der Kugel. Wenn wir jedoch diese Verhältnisse ganz verstehen wollen, so müssen wir uns in einem kleinen Excurs zuvor mit einigen Anschauungen der Analysis situs befreunden.

Fig. 19.



Excurs über die Analysis situs. Was wir unter Analysis situs zu verstehen haben, war bereits im ersten Teile auseinandergesetzt.

Als Litteratur über diesen Gegenstand wollen wir jedoch noch erwähnen:

Riemann, Bd. 54. Crelle 1857 als die Schrift, welche diese Untersuchungen überhaupt zuerst angeregt.

Dyck, Math. Ann. 32. 1888. In dieser neuesten Abhandlung über die Analysis situs finden sich insbesondere sehr zahlreiche und genaue Citate.

Es handelt sich nun bei uns um einen Punkt, der bei Riemann noch nicht hervortritt, dessen Entdeckung man vielmehr Moebius verdankt. Er hat dieselben veröffentlicht in seiner letzten Abhandlung: „Über Polyeder," die zunächst 1865 in den Leipziger Berichten, dann auch im Bd. II. seiner Werke abgedruckt ist. Man

findet dann insbesondere aus dem Nachlasse im Bd. II. der Werke pag. 519. noch nähere Angaben darüber, wie Moebius zu dieser Entdeckung gekommen ist, von der wir jetzt zu sprechen haben. Wir wollen zunächst an einem Beispiel uns die neuen Verhältnisse klar machen. Wenn man einen Streifen Papier nicht in der gewöhnlichen Weise zusammenlegt, dass man die beiden Enden einfach miteinander vereinigt, wodurch eine Ringfläche, wie in Fig. 20ª dargestellt ist, entstehen würde, sondern in der Weise, dass man das eine Ende vorerst umwendet und dann mit dem anderen vereinigt, so stellt dieses Papierstück eine merkwürdige Fläche dar, welche sich wesentlich von der ersten unterscheidet. (Fig. 20ᵇ). Wenn man nämlich von einem bestimmten Punkte der Fläche 20.ᵇ ausgehend längs des Streifens weitergeht, so wird man nach einmaligem Umlaufen desselben auf der anderen Seite der Fläche sich befinden und erst nach nochmaligem Umlaufen wird man auf die Ausgangsseite zurückkommen, eine Eigenschaft, die, wie leicht ersichtlich, der Fläche a/ nicht zukommt. Noch deutlicher tritt dieser Unterschied der Flächen a und b hervor, wenn man den Papierstreifen etwa anzustreichen unternimmt. Während es bei der Figur a/ wohl möglich ist, nur die eine Seite anzustreichen, ist man bei der Figur b/ gezwungen, es auf beiden Seiten zu thun. Man nennt die Fläche b „das Moebiussche Blatt."

Fig. 20.

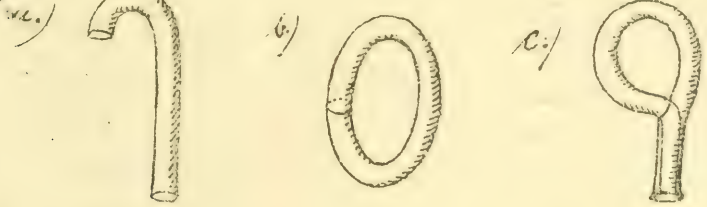
a/

b/

Moebius wandte dieses Blatt auf die Theorie der Polyeder an, insofern letztere auch so gebildet sein können, daß aufeinander folgende Flächen ein solches Blatt ausmachen, (was vor Moebius übersehen worden war.) Wir wollen auf diese specielle Anwendung jedoch nicht näher eingehen. Wir fassen vielmehr allgemein das über das Moebiussche Blatt Gesagte als eine Eigenschaft gewisser krummer Flächen auf, die wir dann „Doppelflächen" nennen wollen. Man wählt diese Bezeichnung, weil man die Fläche doppelt umlaufen muß, ehe man an die Ausgangsstelle zurückgelangt ist. Es ist nun höchst merkwürdig, daß an solche Verhältnisse niemand, auch Riemann nicht, vorher gedacht hat. Man hat eben immer geglaubt, daß man bei einer Fläche stets 2 von einander durchaus verschiedene Seiten unterscheiden könne, die event. nur im Rande zusammenhängen. Das Moebiussche Blatt hat allerdings noch eine Randkurve. Es liegt daher die Frage nahe, giebt es auch durchaus geschlossene Flächen, die doch Doppelflächen sind? In dieser Hinsicht können wir uns gleich ein Beispiel denken, das uns zeigt, daß es in der That geschlossene Doppelflächen giebt. Doch müssen wir, wenn wir im Endlichen bleiben wollen, die Fläche sich selbst durchsetzen lassen. Wir werden dabei nicht weiter davon sprechen, daß die Fläche eine Doppelcurve besitzt, denn der „Verzweigungsschnitt" [Riemann], in welchem sich die Blätter durchsetzen, ist für die hier ins Auge zu fassenden Zusammenhangsfragen ganz unwesentlich.

Wir können dann mit Hülfe eines Kautschukschlauches uns eine solche Fläche leicht vorstellen. Wenn wir die beiden Enden desselben einfach an einander biegen, so bekommen wir eine gewöhnliche Ringfläche, die keine Doppelfläche vorstellt; denn wir können bei ihr eine Aussen- und Innenseite unterscheiden. Wenn wir uns etwa ein flächenhaftes Wesen denken, d.h. ein Wesen, welches, einmal auf die Fläche gesetzt, sich nur entlang der Fläche bewegen kann, so kann dasselbe, wenn es einmal an der Aussenseite sich befindet, wie es sich auch bewegen mag, niemals an die Innenseite gelangen und umgekehrt. Ebenso kann man entweder die Aussenseite oder die Innenseite der Fläche für sich mit Farbe anstreichen. Doch nun kann man den Schlauch noch in ganz anderer Weise zusammenbiegen, indem man nämlich das eine Ende nach innen umstülpt, das andere dagegen durch die Wandung in das Innere hineinleitet und dann mit dem umgestülpten Ende vereinigt. v. Fig. 21. c

Fig. 21.



Auf diese Weise haben wir eine durchaus zusammenhängende Doppelfläche gewonnen, bei welcher eine Innen- und Aussenseite etwa durch besonderen farbigen Anstrich

nicht mehr zu unterscheiden ist. Denken wir uns auf dieser Fläche ein zweidimensionales Wesen, so wird dies, indem es an seinem früheren Ort zurückgelangt, dabei sein eigener Antipode werden können, und es muss zweimal herumkriechen, ehe es in die Ausgangslage zurückgelangt ist.

Wir können nun leicht ein Kennzeichen verabreden, welches uns in den Stand setzt sofort zu entscheiden, ob wir es mit einer Doppelfläche zu thun haben oder nicht. Wir geben dieses Kennzeichen an, indem wir das Bisherige zusammenfassend den allgemeinen Satz aussprechen: „Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, mögen sie Kreisfläche sein oder geschlossen, können noch zweierlei Eigenschaften besitzen. Wenn man aus ihnen an irgend einer Stelle eine mit einem Pfeile versehene Indicatrix construiert, als welche wir uns für die Betrachtung von Flächen ein unendlich kleines mit einem Umlaufssinn versehenes Flächenstück zu denken, und diese längs der Fläche hinschiebt, bis man zur Ausgangsstelle zurückkommt, dann kann es sein, daß der Pfeil der Indicatrix immer nach der ursprünglichen Richtung weist, es kann aber auch sein, dass er seinen Sinn geändert hat. Im letzteren Falle nennt man die Mannigfaltigkeit eine Doppelmannigfaltigkeit, eben weil man zweimal um die Fläche herumgehen muss, damit der Sinn der Indicatrix der alte bleibt."

Wir wollen noch bemerken, daß man mit einer solchen Doppelfläche keinen Raumtheil einschließen kann, dieselbe legt nur eine gewisse Scheidewand durch den Raum hindurch. Dies ist wohl auch der Grund, daß man bisher nicht an die Möglichkeit der Doppelflächen gedacht hat. Denn man versinnlicht Flächen, z. B. im Modell, zugern als Grenzen von Raumteilen.

Wir kehren nun zurück zu unserer Hülfskugel und zu unserer Ebene, auf der wir die elliptische Maassbestimmung haben. „Der Unterschied zwischen unserer Hülfskugel und unserer mit elliptischer Maassbestimmung versehenen, in sich zurücklaufenden Ebene ist nur der, daß die Kugel eine einfache Fläche ist, die in sich zurücklaufende Ebene aber eine Doppelfläche."

Wir fügen sogleich noch den Satz hinzu:

„Entsprechend ist die Mannigfaltigkeit der Halbstrahlen eine einfache Mannigfaltigkeit, die Mannigfaltigkeit der Vollstrahlen eine doppelte Mannigfaltigkeit."

Wir beweisen diese Sätze, indem wir unser Kennzeichen mit Hülfe der Indicatrix anwenden. Bei den Halbstrahlen werden wir als Indicatrix einen schmalen, von Halbstrahlen gebildeten Kegel anzunehmen haben, der mit einem Pfeil zur Bezeichnung des Umlaufsinnes versehen ist Fig. 23. a. Dieser Kegel wird, wie wir ihn auch drehen, in die alte Lage gebracht, stets denselben Umdrehungssinn zeigen. Doch anders wird es, wenn wir uns einen kleinen Kegel um-

den Vollstrahlen bilden und diesem die Pfeile beisetzen. Fig. 23½. Denn wenn wir diesen dünnen Kegel etwa um seinen Mittelpunkt drehen und zwar, wenn diese ungenaue Ausdrucksweise gestattet ist, um 180°, so sehen wir, daß der Kegel an seinen alten Platz gekommen ist, daß aber der Umlaufssinn des Kegels gerade der umgekehrte geworden ist. Wir müssen ihn daher zweimal herumdrehen, bis der Umlaufssinn der alte ist. Diese Betrachtung der Vollstrahlen überträgt sich nun ohne Weiteres auf die Ebene, die der Halbstrahlen auf unsere Hülfskugel. Und so wird uns der auf vorhergehender Seite aufgestellte Unterschied zwischen der elliptischen Ebene und der Hülfskugel leicht verständlich erscheinen.

Fig. 22.

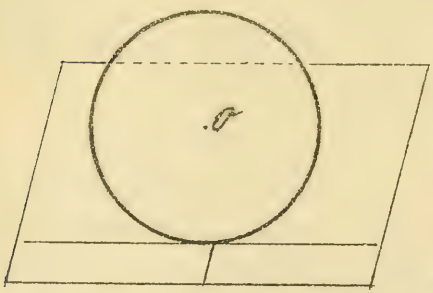
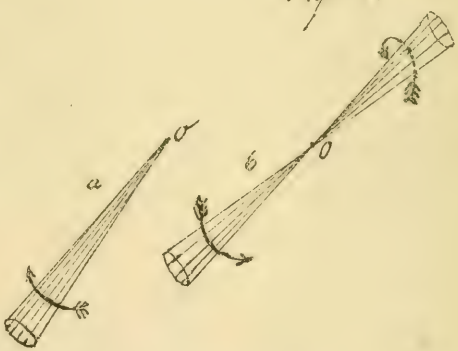


Fig. 23.



Wir wollen in Rücksicht auf die letzten Betrachtungen noch bemerken:

Der merkwürdige Satz, daß eine elliptische Ebene oder auch die Ebene der projectiven Geometrie schlechtweg

durch in sich zurücklaufende gerade Linien nicht in 2 getrennte Hälften zerlegt wird, wie man es doch sonst bei den Flächen, z. B. bei der Kugel gewöhnt ist, dieser Satz ist uns nur deshalb merkwürdig, weil wir in unserer täglichen Erfahrung keine Ursache haben, uns an die Anschauung einer geschlossenen Doppelfläche zu gewöhnen."

Der Vergleich der elliptischen Maassbestimmung in der Ebene und der gewöhnlichen Maassbestimmung auf der Kugel vom Radius $2k'$ mag noch von anderer Seite durchgeführt werden.

Wenn zwei Flächen allgemein so auf einander bezogen sind, dass jedesmal zwei Punkte X und X' der einen Fläche denselben Abstand von einander haben, wie zwei entsprechende Punkte der anderen Fläche, so nennt man in der Flächentheorie diese Flächen aufeinander abwickelbar. So kann man z. B. einen Rotationscylinder auf eine Ebene abwickeln so, dass zwei einander entsprechende Punkte jedesmal zusammenfallen. Wenn wir nun dieses Wort „abwickelbar," welches in der Lehre von den krummen Flächen allgemein gebraucht wird, auch bei unseren speciellen Betrachtungen aufnehmen wollen, so werden wir etwa folgendermaßen unser Resultat der letzten Stunde aussprechen können:
„Die elliptische Ebene und die gewöhnliche Kugel sind auf einander abwickelbar, ohne darum den gleichen Zusammenhang zu haben." Letzteres ist, wie leicht ersichtlich, auch gar nicht erforderlich; denn schon das erwähnte Beispiel des

Cylinders zeigt uns, daß zwei Flächen, die auf einander abwickelbar sind, durchaus nicht identisch aufeinander bezogen zu sein brauchen."

Nun knüpft die Flächentheorie die Untersuchungen über die Abwickelbarkeit gewöhnlich nicht an den fertigen Ausdruck für den längs der Fläche genommenen endlichen Abstand zweier beliebiger Punkte an, sondern man wählt auf beiden Flächen 2 unendlich benachbarte einander entsprechende Punkte und zeigt, daß deren Abstand, den man als das „Bogenelement" ds bezeichnet, auf beiden Flächen derselbe ist.

Um daher unsere Betrachtungen an die der Flächentheorie anzuschließen, wollen wir einmal den Ausdruck des Bogenelements ds für 2 unendlich benachbarte Punkte x und $x + dx$ auf unserer elliptischen Ebene resp. auf der Hülfskugel von Radius $2k'$ berechnen. Wir werden uns zu diesem Zwecke, um Zwischenrechnungen zu vermeiden, nicht der bisherigen Definition des Abstandes vermittelst des Logarithmus des charakteristischen Doppelverhältnisses bedienen, sondern von der Formel für den cos. $\frac{M}{2k'}$ ausgehen. Aus dieser folgt sofort:

$$M(xx') = 2k' \cdot \arcsin \frac{\sqrt{4k'^2(xt'-x't)^2 + 4k'^2(yt'-y't)^2 + (xy'-x'y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+4k'^2t^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2+4k'^2t'^2}},$$

Diese Formel, welche den Abstand der Punkte x, x' in unverkürzter Form darstellt, wollen wir zu Grunde legen.

Wir setzen nun ihr jetzt $t = t' = 1$, mit anderen Worten, wir gehen von homogenen Coordinaten zu gewöhnlichen über. Lassen wir dann den Punkt x' dem Punkte x unendlich benachbart sein, so können wir setzen:
$x' = x + dx$, $y' = y + dy$. Diese Werthe substituieren wir in unsere Formel und vereinfachen dieselbe dann, indem wir uns auf unendlich kleine Größen erster Ordnung beschränken. Wir erhalten so:

$$ds = 2k' \cdot \frac{\sqrt{4k'^2 dx^2 + 4k'^2 dy^2 + (x\,dy - y\,dx)^2}}{x^2 + y^2 + 4k'^2}.$$

Dividieren wir noch Zähler und Nenner durch $4k'^2$, so kommt schliesslich

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{4k'^2}}}{1 + \frac{x^2 + y^2}{4k'^2}}$$

Dieser Ausdruck für das Bogenelement gilt natürlich ebensowohl für die elliptische Ebene, wie für die gewöhnliche Kugel vom Radius $2k'$. Lassen wir nun in ihm k' unendlich groß werden, so geht ds über in:
$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Wir erkennen daher:
„Unser so gefundenes Bogenelement geht für $k' = \infty$ in das Bogenelement der gewöhnlichen Maassbestimmung der Ebene über, was uns aufs neue mit der Anschauung vertraut macht, daß die gewöhnliche Maassbestimmung der Ebene ein Grenzfall unserer jetzigen elliptischen Maassbestimmung ist."

Wir gehen nun über zu:

2. der hyperbolischen Maassbestimmung.

Derselben liegt ein einteiliger Kegelschnitt zu Grunde. Wir wollen in Bezug auf denselben: den Abstand zweier Punkte als $M(xx') = k \log. D$; den Winkel zweier Strahlen als $M(uu') = K \log. \Delta$. in der früher verabredeten Weise einführen. Wir wollen ferner gleich k als reell, im übrigen aber beliebig, K dagegen $= \frac{i}{2}$ voraussetzen, aus der letzteren Annahme ergiebt sich sofort, das die Winkelbestimmung die Periode π hat.

Wir können dann gleich eine allgemeine Betrachtung vorausschicken. Wir erkennen zunächst:

Alle Formeln, die wir für die elliptische Maassbestimmung erhalten haben, sind doch schließlich nur analytische Identitäten, die sich aus dem einmal definierten Ausdruck für den Abstand zweier Punkte oder Strahlen ergeben haben, nicht aber aus besonderen geometrischen Verhältnissen. Es sei z. B. erinnert an die Formeln der elliptischen Trigonometrie oder an die zuletzt abgeleitete Formel für den Abstand ds zweier unendlich benachbarter Punkte. Nun unterscheidet sich aber unsere hyperbolische Maassbestimmung von der elliptischen, was die Rechnungen angeht, nur dadurch, daß wir jetzt k nennen, was früher mit $k'i$ bezeichnet ist. Es ergiebt sich daher ohne weiteres die Regel:

" Ersetzt man in den Formeln der elliptischen Geometrie

die dort vorkommende Größe k' durch $\frac{k}{i}$, so erhält man Formeln der hyperbolischen Geometrie."

Wir wollen dies an einem Beispiel einmal durchführen. Wir hatten in der elliptischen Geometrie als absoluten Kegelschnitt schliesslich genommen: $x^2+y^2+4k'^2t^2=0$, welches einen nullteiligen Kreis vom Radius $2k'i$ darstellt. Ersetzen wir jetzt k' durch $\frac{k}{i}$, so bekommen wir $x^2+y^2-4k^2t^2=0$. Dieses stellt einen einteiligen Kreis dar, den wir einmal der hyperbolischen Maaßbestimmung zu Grunde legen wollen. Wenn wir dann das Bogenelement ds ausrechnen wollen, so bekommen wir, indem wir in dem früheren Ausdruck für k' setzen $\frac{k}{i}$:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2-\frac{(ydx-xdy)^2}{4k^2}}}{1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}}$$

Durch diese Formel läßt sich also beispielsweise das Bogenelement im hyperbolischen Falle geben. Von hier aus erkennen wir dann wieder, daß sich die gewöhnliche Geometrie der Ebene nicht nur an die elliptische, sondern auch an die hyperbolische als Grenzfall anschließt.

Wir wollen den oben ausgesprochenen Satz noch auf andere Weise in Worte fassen. Wir fanden, die elliptische Geometrie ist dieselbe, wie die auf einer Kugel von Radius $2k'$. Jetzt werden wir sagen können:

„Die hyperbolische Geometrie ist wie die gewöhnliche Geometrie auf einer Kugel vom Radius $\frac{2k}{i}$, also auf

einer Kugel von imaginärem Radius."

Hierdurch ist allerdings der unmittelbaren Anschauung wenig gedient. Der Satz wird uns erst später nützlich werden.

Wir wollen uns jetzt speciell in die Verhältnisse der hyperbolischen Geometrie hineindenken.

a.) Bestimmung des Abstandes zweier Punkte x und x'.

Es seien zwei Punkte x, x' gegeben, deren Abstand hyperbolisch bestimmt werden soll. Wir verbinden dieselben und erhalten als Schnittpunkte der Verbindenden derselben die reellen oder imaginären Punkte ξ, ξ', die mit den Punkten x, x' selbst das der Maassbestimmung zu Grunde liegende Doppelverhältnis bilden. Je nach dem Wert, den dieses Doppelverhältnis annimmt, ergeben sich dann leicht die folgenden Sätze:

Wenn x und x' beide im Innern des Kegelschnittes liegen, dann kann ihre Entfernung reell genommen werden und ist insofern eindeutig bestimmt, da der log. nur eine imaginäre Periode hat. (Fig. 24.a).

Liegt dagegen nur der eine Punkt im Innern der andere im Ausseren des Kegelschnitts, so ist die Entfernung imaginär, da das Doppelverhältnis der 4 Punkte negativ wird. (Fig. 24.a); keiner der unendlich vielen Werte des Logarithmus kann vor dem anderen bevorzugt werden.

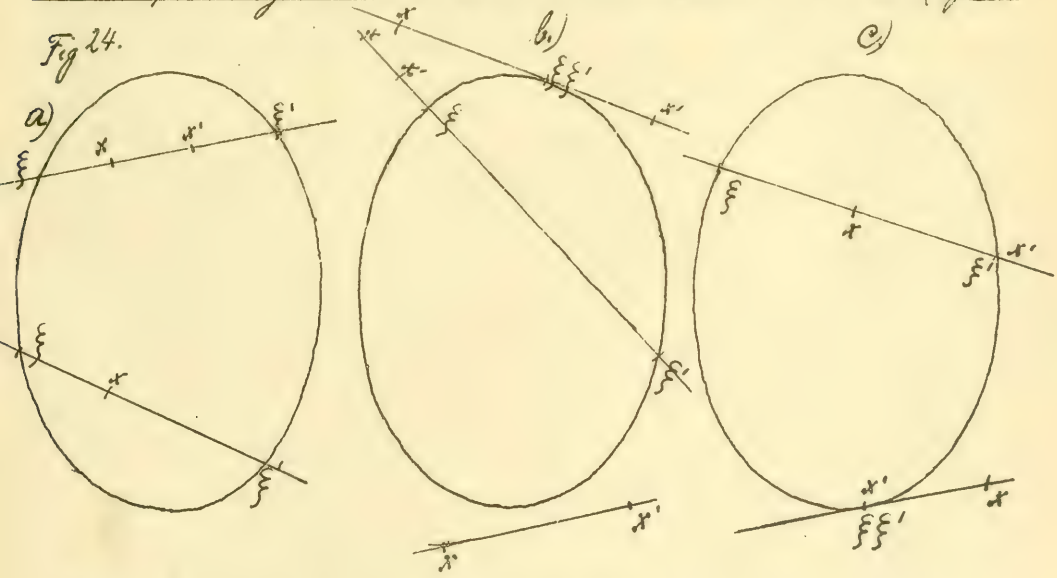
Liegen x und x' beide ausserhalb, so ist zu unterscheiden, ob ihre Verbindungsgerade den Kegelschnitt

trifft, nicht trifft oder berührt. Im ersten Falle wird das charakteristische Doppelverhältnis reell, im zweiten imaginär, im dritten gleich 1. Daher ist im ersten Fall die Entfernung der Punkte, wenn wir wollen, reell, im zweiten imaginär, im dritten gleich 0 (Fig. 24 b.).

Rückt einer der beiden Punkte, z. B. x' auf unseren Kegelschnitt, so wird das Doppelverhältnis und damit auch die Entfernung der Punkte unendlich groß.

Hierbei müssen wir nur den einzigen Fall ausnehmen, wo die Verbindungslinie XX' im Punkte x' berührt. Denn da dann das Doppelverhältnis gleich $\frac{0}{0}$, d.h. unbestimmt ist, so erhält auch der Logarithmus desselben und damit die Entfernung der Punkte einen unbestimmten Wert (Fig. 24 c.).

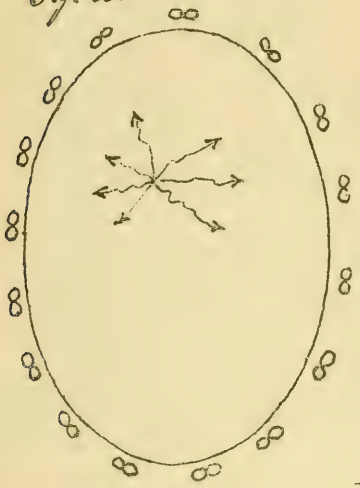
Fig 24.



Dies sind die ersten Bemerkungen, die man macht, wenn

man sich zu orientieren sucht. Denken wir uns nun einmal wieder ein mit hyperbolischer Maussbestimmung ausgestattetes zweidimensionales Wesen im Inneren des Kegelschnittes, so wird dieses offenbar nach jeder Richtung sich frei bewegen können. „Jeder Punkt im Innern wird für dasselbe erreichbar sein, die Punkte des Kegelschnittes sind unerreichbar, weil unendlich fern, und die Punkte außerhalb des Kegelschnittes existieren überhaupt nicht, sie bilden ein ideales Gebiet."

Fig. 25.



b/ Bestimmung des Winkels zweier geraden Linien.

Es seien die beiden geraden Linien u und u' gegeben. Von ihrem Schnittpunkte aus ziehen wir die Tangenten an den absoluten Kegelschnitt und bestimmen das Doppelverhältnis derselben mit den gegebenen Linien u und u'. Je nach dem Werte desselben werden wir die verschiedenen möglichen Fälle der hyperbolischen Winkelbestimmung zu unterscheiden haben. Doch ist jetzt zu bemerken, daß wir $k' = \frac{i}{2}$ genommen haben, so daß die Verhältnisse sich gerade umgekehrt verhalten, wie unter a.) Hiernach ergiebt sich:

Kreuzen sich die beiden Skalen im Innern des absoluten Kegelschnittes, so bilden sie einen reellen

Winkel, denn die Tangenten von ihrem Schnittpunkte aus sind imaginär. (Fig 25ᵃ).

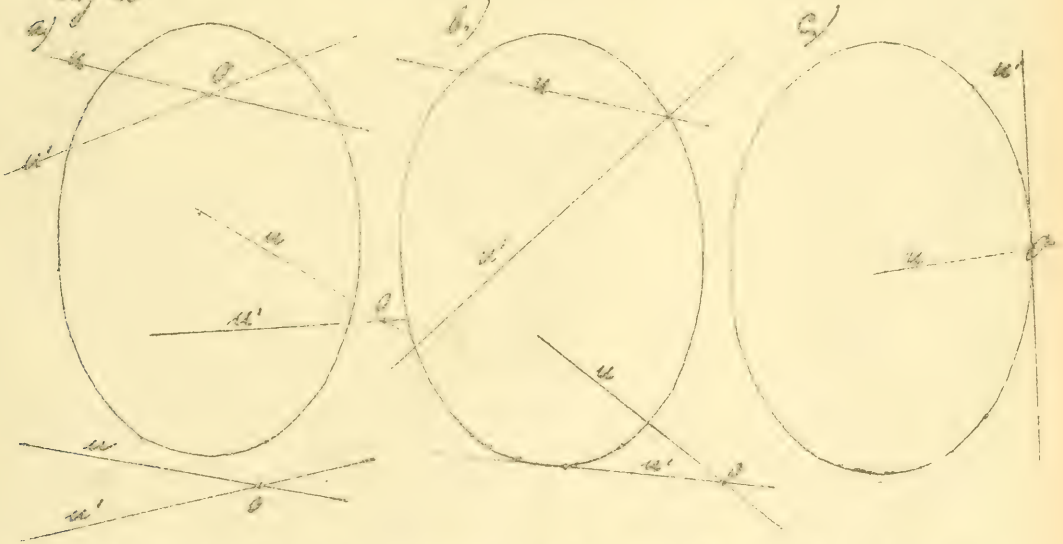
Zwei gerade Linien, die sich ausserhalb des Kegelschnittes kreuzen, mögen sie durch das Innere selbst laufen oder nicht, bilden einen imaginären Winkel (Fig. 26ᵃ).

Zwei gerade Linien, die sich auf dem Kegelschnitt kreuzen, bilden einen Winkel, dessen Wert gleich 0 ist. (Fig. 26.b).

Zwei gerade Linien, von denen eine eine Tangente des Kegelschnittes ist, bilden einen unendlich grossen Winkel. (Fig. 26 c). Hier ist indess besonders zu berücksichtigen der Fall:

Zwei gerade Linien, von denen die eine eine Tangente

Fig 26



des Kegelschnittes ist, die andere aber durch den Berührungspunkt läuft, bilden einen unbestimmten Winkel (Fig. 26 c).

(Er müsste nach dem Vorstehenden ja auch gleichzeitig 0 und ∞ sein).

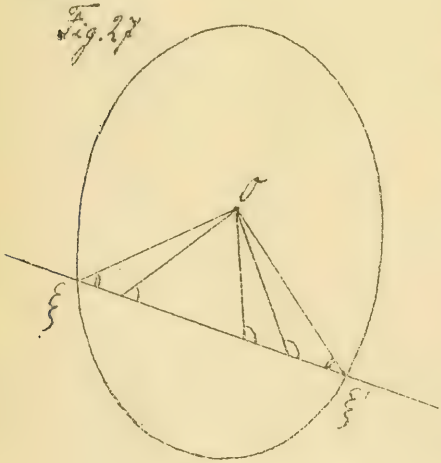
Dies wird eine vollständige Aufzählung der möglichen Fälle sein.

Stellen wir uns nun wieder auf den Standpunkt des Beobachters, der im Innern des absoluten Kegelschnittes sich nach hyperbolischer Maassbestimmung bewegen kann, so finden wir:

„Für unseren Beobachter hat die feste Gerade 2 unendlich weite Punkte ξ, ξ' und das ausserhalb des Kegelschnittes verlaufende Segment scheint für ihn nicht vorhanden, es hat für ihn nur ideale Bedeutung." Er kann wohl hinblicken, aber dasselbe nicht selbst erreichen; das Segment hat für ihn, wie man in der Optik sagt, „nur virtuelle Bedeutung."

Wie werden nun die Strahlen eines durch durch O laufenden Büschels bezüglich der festen Geraden im Absoluten fixieren sein?

Fig. 27



Wir erkennen sofort:

Die von O auslaufenden geraden Linien zerfallen in 2 Kategorien, in solche, welche die gegebene Gerade treffen, und in solche, welche sie nicht treffen. Diese beiden Kategorien sind von einander geschieden durch 2 Strahlen, welche die gegebene gerade Linie im Unendlichen treffen und durch sie mit ihr einen Winkel 0 bilden."

Unser Beobachter wird nun für die Linien $O\xi$ und $O\xi'$ auch einen Namen haben, er wird sie „parallel" nennen, denn er hat gelernt, solche Linien parallel zu nennen, die gerade die Grenzlagen des Schneidens ergeben. Daher können wir unser Ergebnis auch noch in folgender frappanteren Weise aussprechen:

„Dementsprechend gibt es von O aus für unseren Beobachter zwei parallele Linien zur gegebenen Linie, zwischen welchen solche gerade Linien des ferneren verlaufen, die die gegebene gerade Linie gar nicht treffen."

Werfen wir jetzt in Rücksicht hierauf einen Blick auf die elliptische und gewöhnliche Massbestimmung in der Ebene, so finden wir:

Wenn wir die hyperbolische Massbestimmung mit der elliptischen Geometrie, welche keine reellen wohl aber zwei imaginäre Parallele kennt, — denn jede reelle Gerade schneidet ja den vollständigen Kegelschnitt der elliptischen Geometrie in zwei konjugiert imaginären Punkten — und andererseits mit der gewöhnlichen Geometrie vergleichen, in der nur eine Parallele auftritt, so erscheint wieder die gewöhnliche Geometrie als ein Übergangsfall zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie."

Wir wollen jetzt noch einige weitere Betrachtungen in der hyperbolischen Geometrie anstellen.

Wir beginnen mit der Darstellung der trigonom. Fi-

schen Formeln. Schon in der letzten Vorlesung haben wir gesehen, daß dieselben übereinstimmen müssen mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie auf einer Kugel vom Radius $\frac{2k}{i}$.

Wir gehen aus von den gewöhnlichen sphärischen Formeln für eine Kugel vom Radius R:

1.) $\sin.\frac{A}{R} : \sin\frac{B}{R} = \sin.\alpha : \sin\beta.$

2.) $\cos.\frac{A}{R} = \cos.\frac{B}{R}\cos.\frac{C}{R} + \sin.\frac{B}{R}\sin\frac{C}{R}\cos.\alpha$, etc. —

Diese Formeln werden jetzt unverändert gelten müssen, wenn wir für R einsetzen $\frac{2k}{i}$. Wir stellen nun sogleich den Satz auf:

„Indem wir für R die rein imaginäre Größe $\frac{2k}{i}$ einsetzen, entsteht aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ein neues reelles Formelsystem, in welchem bloß die cyklometrischen Funktionen durch sogenannte hyperbolische Funktionen ersetzt sind."

Wir werden dies jetzt im einzelnen nachzuweisen haben. Es ist bekanntlich allgemein:

$$\cos.\frac{A}{R} = \frac{e^{i\cdot\frac{A}{R}} + e^{-i\cdot\frac{A}{R}}}{2}$$

Setzen wir für R ein $\frac{2k}{i}$, so kommt:

$$\cos.\frac{iA}{2k} = \frac{e^{-\frac{A}{2k}} + e^{+\frac{A}{2k}}}{2}$$

Wir erhalten also eine

Verbindung reeller Exponentialgrößen. Den Ausdruck rechts nennt man nun hyperbolischen Cosinus und schreibt ihn abkürzend: $\mathfrak{Cof}.\left(\frac{A}{2k}\right)$.

Ebenso behandeln wir jetzt den $\sin.\frac{A}{R}$. Es ist wieder zunächst:

$$\sin.\frac{A}{R} = \frac{e^{\frac{iA}{R}} - e^{-\frac{iA}{R}}}{2i}$$

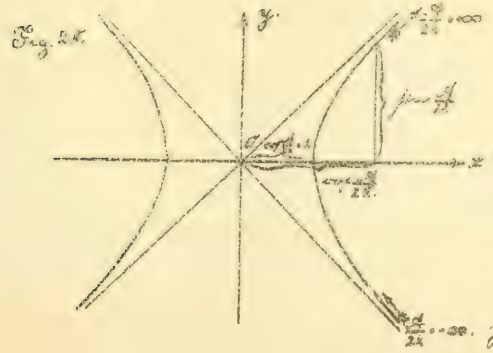
Hieraus ergiebt sich bei derselben Substitution $R = \frac{2k}{i}$:

$$\sin.\frac{iA}{2k} = \frac{-e^{-\frac{A}{2k}} + e^{\frac{A}{2k}}}{2i} = i.\left[\frac{e^{\frac{A}{2k}} - e^{-\frac{A}{2k}}}{2}\right].$$

Der Klammerausdruck rechts, welcher wieder durchaus reell ist, nennt man den hyperbolischen Sinus und schreibt ihn: $\mathfrak{Sin}.\left(\frac{A}{2k}\right)$.

Die Bezeichnung „hyperbolischer Cosinus und Sinus" rührt von der Beziehung her, die zwischen ihnen besteht: $\mathfrak{Cof}.^2 - \mathfrak{Sin}.^2 = 1$. Dies giebt bekanntlich die Gl. einer gleichseitigen Hyperbel, wenn man den $\mathfrak{Cof}.$ als die x-Ordinate, den $\mathfrak{Sin}.$ als die y-Ordinate eines rechtwinkligen Systemes deutet.

Fig. 28.



Wir haben so gefunden:

Der cyklometrische cos. geht in den hyperbolischen $\mathfrak{Cof}.$ und der cyklometrische sin. in den mit i multiplizierten hyperbolischen $\mathfrak{Sin}.$ über.

Wenn wir nun diese Aenderung in unseren Grundformeln vornehmen, so werden wir sehen, alles Imaginäre fällt aus ihnen heraus. Nämlich wir bemerken:

„Die Formeln der sphaerischen Trigonometrie ergeben darum bei dieser Substitution etwas Reelles, weil die sin. in ihnen immer gepaart vorkommen"

Diese Verhältnisse hat man schon gekannt, bezw. beachtet, ehe man von hyperbolischer Geometrie etwas wußte. Man hat insofern der gewöhnlichen sphaerischen Geometrie eine „Pseudosphaerische Geometrie" zur Seite gestellt, d.h. eine Geometrie auf einer Kugel mit imaginärem Radius. Wenn wir nun dieses Wort aufnehmen, so können wir unser Resultat auch so aussprechen:

„Die Trigonometrie der mit hyperbolischer Maaßbestimmung ausgestatteten Ebene ist die pseudosphaerische Geometrie."

Wir gehen jetzt weiter dazu über von der Inhaltsberechnung gegebener Figuren in der hyperbolischen Ebene zu reden. Wir können allgemein, wie in der Flächentheorie gezeigt wird, den Inhalt einer ebenen oder krummen Figur sofort berechnen, wenn wir wissen, wie sich das Bogenelement $(ds)^2$ durch die auf die Fläche bezüglichen Coordinaten ausdrückt. Wir knüpfen wieder an die gewöhnliche Theorie der krummen Oberflächen an. Man setzt dort:

$(ds)^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ wo unter u und v beliebige Coordinaten auf der Fläche und unter E, F, G

geeignete Funktionen von u und v verstanden sind. Für unsere mit hyperbolischer Maassbestimmung ausgestattete Ebene hatten wir nun ebenfalls bereits das Quadrat des Bogenelementes berechnet. Wir hatten gefunden:

$$(ds)^2 = \frac{dx^2+dy^2-\frac{(ydx-xdy)^2}{4k^2}}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2},$$

wo bei unserer Betrachtung der absolute Kegelschnitt: $x^2+y^2-4k^2t^2=0$ zu Grunde lag. Wir wollen übrigens bemerken, dass wir stets die Gl. des beliebig gegebenen absoluten Kegelschnittes auf die Form bringen können, indem wir ein Polardreieck als Coordinatendreieck annehmen; wir sind also durchaus nicht gezwungen die Gl. $x^2+y^2-4k^2t^2=0$ stets als einen Kreis vom Radius $2k$, d. h. die x, y, t als homogene rechtwinklige Coordinaten der gewöhnlichen Ebene zu deuten. Wir erkennen also:

„Was man in der allgemeinen Flächentheorie u und v nennt, das sind hier insbesondere x und y, und das Quadrat des Bogenelementes hat dann die Gestalt:

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2-\frac{(ydx-xdy)^2}{4k^2}}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{y^2}{4k^2}\right)dx^2+\frac{2xy}{4k^2}dxdy+\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)dy^2}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2}.$$

Die letzte Darstellung von ds^2 gestattet die Funktionen $E, 2F, G$ in unserem speciellen Falle sofort anzugeben, es sind eben entspr. die Coefficienten von $dx^2, dxdy$ und dy^2.

In der Flächentheorie drückt sich nun der Flächeninhalt eines bestimmte begrenzten Teiles der Fläche aus durch das über diesen Theil ausgedehnte Doppelintegral:

$J = \iint du\,dv \sqrt{EG - F^2}$; wir gehen auf eine Ableitung dieser Formel der Kürze halber nicht ein.

Diese Formel werden wir jetzt sofort auf unsere hyperbolische Ebene übertragen und erhalten, wenn wir für E, F, G die gefundenen Ausdrücke einsetzen:

$$J = \iint dx\,dy \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) - \frac{x^2 y^2}{16 k^4}}}{\left(1 - \frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2}$$

Vereinfachen wir noch den Zähler dieser Formel, so bekommen wir schließlich:

$$J = \iint \frac{dx\,dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{4k^2} - \frac{y^2}{4k^2}}}{\left(1 - \frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2} = \iint \frac{dx\,dy}{\left(\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{4k^2}}\right)^3}$$

Ist also der absolute Kegelschnitt durch die Gl. $x^2 + y^2 - 4k^2 t^2 = 0$ gegeben, so stellt sich der Flächeninhalt einer ebenen Figur durch das Doppelintegral dar:

$$J = \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{4k^2}}}.$$

An diesem Doppelintegral sehen wir wieder, was schon oft bestätigt wurde, daß die gewöhnliche parabolische Maassbestimmung den Grenzfall der hyperbolischen Geometrie für $k = \infty$ darstellt. Setzen wir nämlich in unserer Formel $k^2 = \infty$, so erhalten wir die gewöhnliche Formel der elementaren Geometrie für den Flächeninhalt ebener Figuren: $\iint dx\,dy$.

Wenn wir dieselbe Rechnung für den Fall der elliptischen Maassbestimmung durchgeführt hätten, so würden wir natürlich schließlich auf eine Formel gekommen sein, die sich von der obigen nur darin unterscheiden würde, daß für k^2 eingesetzt ist $-k^2$.

Wir wollen nun von unserer Formel eine Anwendung machen auf die hyperbolische Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks.

Fig. 29.

Bei der elliptischen Maassbestimmung ergab sich bei der Berechnung des Dreiecksinhaltes derselbe durch die Form:

$J = 4k^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, woraus man schließen konnte, daß der Exzess $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ stets größer als 0 ist. Es muß sich diese Formel für J natürlich auch aus unserem Doppelintegral ergeben. Hieraus können wir aber sofort ersehen, was sich für den Dreiecksinhalt ergiebt, wenn wir hyperbolische Maassbestimmung zu Grunde legen. Wir werden erhalten müssen:

$$J = -4k^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Bemerkung.: Es ist gut, das Schlussverfahren, welches wir hier angewandt haben, sich wohl zu überlegen. Man pflegt wohl zu sagen: Ein solches Schlussverfahren gründet sich auf die „Allgemeinheit der Analysis." Hiermit ist viel Missbrauch getrieben worden.

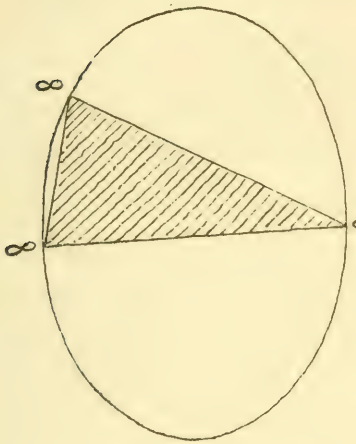
An die letzte Formel, die sich auf die hyperbolische Geometrie bezieht, wollen wir nun unsere weitere Discussion anknüpfen. Da der Flächeninhalt J jedenfalls positiv ist, so können wir sofort sagen:

„In der hyperbolischen Geometrie ist die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als π und der Dreiecksinhalt ist dem absoluten Werte dieses negativen Excesses proportional."

Dies ist abermals ein merkwürdiger Unterschied von unseren früheren Resultaten. In der elliptischen Geometrie ist die Winkelsumme im Dreieck grösser als π, in der gewöhnlichen Geometrie gleich π, in der hyperbolischen endlich $< \pi$. Wir haben hier also eine ganz ähnliche Gegenüberstellung der drei Arten der Maassbestimmung, wie in der vorigen Stunde in Betreff der Parallelentheorie.

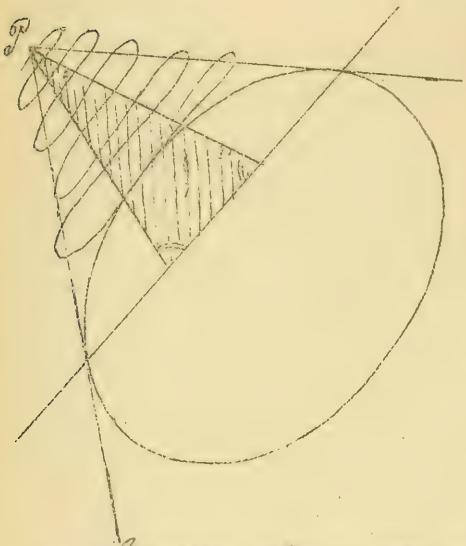
Wir wollen nun unser letztes Resultat an einigen Beispielen uns näher führen. Wir behaupten zuerst, dass wir z. B. sehr wohl in der hyperbolischen Geometrie ein Dreieck zeichnen können, dessen 3 Winkel einzeln

gleich 0 sind, so daſs dann sicher ihre Summe $< \pi$ ist. Es ist dies sehr einfach. Wir zeichnen das Dreieck so, daſs seine 3 Ecken auf dem absoluten Kegelschnitt liegen. Dann ist gewiſs jeder der 3 Winkel gemäſs früherer Betrachtungen gleich 0. Wir können auch noch sagen: „die drei Seiten des Dreiecks sind einander parallel," denn jede schneidet die anderen in einem unendlich entfernten Punkte. Dieses enthält natürlich in der hyperbolischen Maass-bestimmung durchaus nichts Widersinniges. Das Widersinnige, das wir bei der ersten Kenntnisnahme solcher Sätze empfinden, bezieht sich immer darauf, daſs wir unwillkürlich an die Verhältnisse der gewöhnlichen Geometrie denken.



Nun wollen wir jedoch weiter sehen, ob wir nicht ein Dreieck konstruieren können, daſs 2 rechte Winkel hat. Nehmen wir die eine Seite zunächst beliebig an, doch so, daſs sie das Kegelschnittinnere durchsetzt, auf welches es hier allein ankommt. Wir errichten nun auf dieser Grundlinie zwei Perpendikel im hyperbolischen Sinne. Man sollte nun meinen, daſs das Dreieck, welches so entstehen wird, eine Winkelsumme gröſser als π, oder mindestens $= \pi$ haben müſste, da ja 2 R

schon unterzubringt sind. Doch fragen wir uns vorerst, wann steht eine gerade Linie überhaupt auf einer anderen senkrecht? Offenbar dann, wenn sie auch den Pol derselben geht.



Denn es wird ebendann, wie leicht zu zeigen, wenn man das entstehende Tangentialdreieck als Coordinatendreieck wählt, das Doppelverhältnis der beiden Linien mit den Tangenten aus ihrem Schnittpunkte den Wert –1 erhalten. Errichtet man daher auf der ersten Geraden zwei Senkrechte, so werden dieselben sich im Pol der Geraden, als in der dritten Ecke des Dreieckes schneiden müssen. Aber dieser Pol liegt hier ausserhalb unseres Kegelschnittes. Nun denken wir uns einmal wieder in die Seele des Beobachters im Innern des Kegelschnittes hinein. Für ihn wird bei der angegebenen Lage des Pols dann durch die angeführte Construktion gar kein Dreieck entstehen, die beiden Perpendikel schneiden sich für ihn ja überhaupt nicht, es ist also für ihn nur eine offene Figur da. Und in der That bilden auch die beiden Perpendikel nach pag. 114. nur einen imaginären Winkel miteinander. Hierdurch ist also Einwand endkräftet. Hiermit

wollen wir die Betrachtung der Flächeninhalts-Bestimmung beschließen.

Wir wenden uns nun weiter dazu, den Kreis in der hyperbolischen Geometrie zu behandeln.

Wir legen den absoluten Kegelschnitt wieder in der speciellen Form zu Grunde $\Sigma_{xx} = x^2 + y^2 - 4k^2 t^2 = 0$, indem wir ihn auf ein Polardreieck bezogen denken.

Wir werden dann am besten ausgehen von der Formel:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \cdot \arccos \frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}.$$

Wir lassen dann den Punkt x' fest gegeben sein, den Punkt x dagegen als veränderlich. Soll dann x auf einem Kreise um x' sich bewegen, so muß stets sein Abstand $(M(xx'))$ vom Punkte x' constant sein. Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres als Gl. des Kreises in hyperbolischem Sinne:

$$\Sigma_{xx'} = \text{Const.} \sqrt{\Sigma_{xx} \Sigma_{x'x'}} \quad \text{oder rational gemacht:}$$
$$\Sigma^2_{xx'} = \text{Const.}^2 \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}.$$

Diese Gleichung ist vom 2. Grade in x, stellt also einen Kegelschnitt dar. Wir erkennen daher:

„Die Kreise der hyperbolischen Geometrie sind Kegelschnitte."

Nun wollen wir sehen, daß wir aus der Gleichungsform dieser Kegelschnitte noch einiges ablesen.

Setzen wir $\Sigma_{xx} = 0$, so kommt:

$\Sigma_{xx'}^2 = 0$, dies aber stellt die doppelt gezählte Polare des Punktes x' in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt dar. In Worten lautet dieses Ergebnis:

„Stellen wir unseren Kreis mit dem absoluten Kegelschnitt zusammen, so kommt dasselbe heraus, als wenn wir ihn mit der doppelt zählenden Polaren zusammenstellen."

Dies läßt unmittelbar erkennen:

„Unser Kreis hat die Eigenschaft, den absoluten Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten zu berühren, in welchen denselben von der Polaren des Kreismittelpunktes geschnitten wird."

Dieser Satz gestattet, wie leicht zu sehen, sofort auch die Umkehrung. Wenn wir daher einen Kegelschnitt construieren, der den absoluten Kegelschnitt in 2 Punkten berührt, so ist ersterer ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Pol der Verbindungssehne ist.

„Durch diese Eigenschaft ist der Kreis also vollständig definiert, und es besteht ein Büschel concentrischer Kreise aus der Gesammtheit derjenigen Kegelschnitte, welche den absoluten Kegelschnitt in 2 festen Punkten berühren."

Jetzt wollen wir noch durch einige Figuren die letzten Verhältnisse deutlich machen. Wir können in

der hyperbolischen Geometrie drei Fälle solcher concentrischer Kreisscharen unterscheiden, die sich je nach der Lage des Mittelpunktes S' sondern lassen

1.) Es liege S' im Innern des absoluten Kegelschnittes. Dann legt sich das Kreissystem um S' herum. Ist der absolute Kegelschnitt als Ellipse gezeichnet, was wir auch in den folgenden Fällen annehmen wollen, so besteht das System zunächst aus grösser und grösser werdenden Ellipsen, die um S' herumlaufen, für ∞ großen Radius r erhalten wir den absoluten Kegelschnitt selbst. Dann geht das Büschel weiter zunächst in noch weiter gestreckten Ellipsen, dann in eine Parabel, endlich in Hyperbeln über, die schließlich in der doppelt zählenden Polaren von S' sich zusammenziehen. (Fig. 32.)

2.) Liegt S' ausserhalb der Ellipse, so beginnt das System der Kreise zunächst mit der Polaren von S', an diese schließen sich stets immer größer werdende Ellipsen, die schließlich wieder in den absoluten Kegelschnitt als Grenzkreis für $r = \infty$ übergehen. Weiterhin folgen noch weitere Ellipsen, die dann mit einer Parabel als Zwischenlage in Hyperbeln übergehen, deren Grenze für den einen Winkelraum gemeinsame die beiden Tangenten von S' an den Kegelschnitt bilden. Dann setzt sich das System fort in Hyperbeln, die im anderen Winkelraum liegen. Schließlich schält man das außerhalb des absoluten Kegelschnittes verlaufende Segment der Polaren doppelt

gezählt (Fig. 33.)

3) Der dritte Fall, wo x' auf dem Kegelschnitt liegt, stellt den Uebergangsfall der beiden ersten dar. Die Polare von x fällt dann mit der Tangente in x' zusammen. Wir bekommen als System der hyperbolischen concentrischen Kreisschaar dann zunächst größer und größer werdende Ellipsen im Innern des absoluten Kegelschnittes, die sämmtlich mit letzterem an einer festen Stelle eine vierpunktige Berührung haben. Im Grenzfall tritt wieder der absolute Kegelschnitt selbst auf, dann folgen noch weitere Ellipsen, die darauf vermittelst einer Parabel in Hyperbeln übergehen. Diese ziehen sich schließlich wieder in den doppelt zählenden Polaren von x' (der Tangente von x'), zusammen. — Dieser dritte Fall ist durchaus als ein Grenzfall aufzufassen. Man nennt daher auch diese hyperbolischen Kreise in der nicht-euklidischen Geometrie: Grenzlinien oder Horocykeln. Ihr Mittelpunkt ist von den Peripheriepunkten stets unendlich weit entfernt. (Fig. 34.)

Fig. 32.

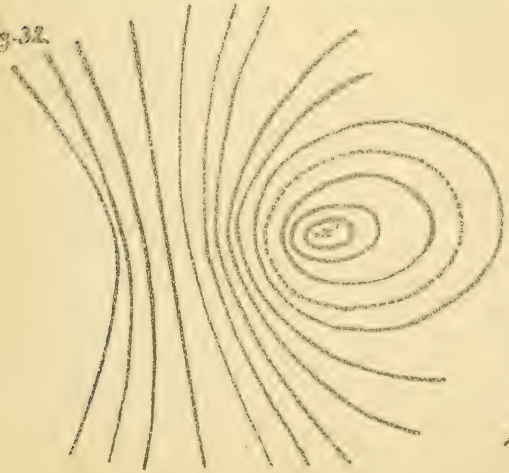


Fig. 33.

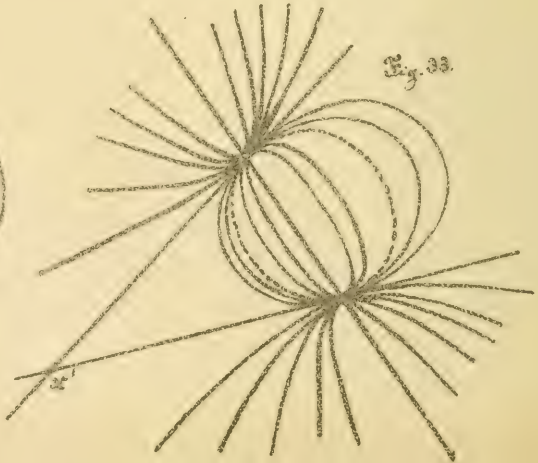
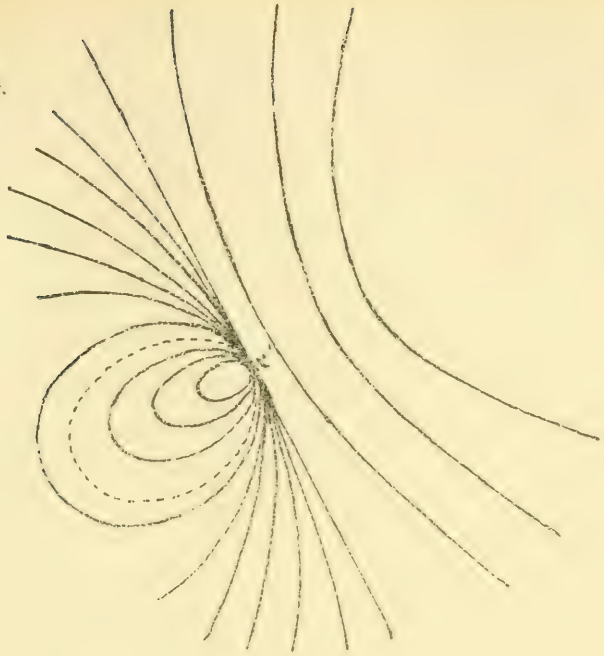


Fig. 34.

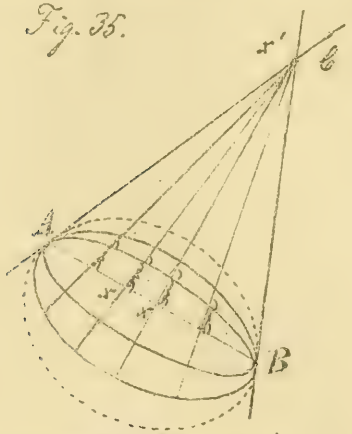


Wir wollen mit der Theorie der Kreise in der hyperbolischen Massgeometrie noch weiter fortfahren. Denken wir uns wieder einmal einen mit hyperbolischer Massbestimmung versehenen Beobachter im Innern des absoluten Kegelschnittes, wie werden diesem dann die verschiedenen Kreise erscheinen? Es kommen hier natürlich nur 3 Arten der Kreise in Betracht, welche nicht unendlich wie Kegelschnittes selbst liegen. Wir erkennen leicht: Die Kreise, die ganz im Innern des Kegelschnittes liegen, wird der Beobachter Kreise schlechthin nennen (s. Fig. 32), die Kreise, deren Mittelpunkt auf dem absoluten Kegelschnitt liegt, (s. Fig. 34), werden für ihn Kreise mit unendlich

grossem Radius darstellen, sie werden ihm eben als die Grenzlagen erscheinen, denen sich die Kreise nähern, wenn ihr Radius unendlich gross wird. (Horocyclen oder Grenzkreise.).

Was aber wird es von der dritten Art von Kreisen sagen, deren Mittelpunkt als ausserhalb des absoluten Kegelschnittes gelegen für seine Bewusstsein nicht existieren wird? Wir haben schon auf pag. 126 gesehen, dass die Geraden durch den Pol C, welche den Kegelschnitt schneiden, auf der Verbindungssehne A B senkrecht stehen.

Fig. 35.



Ferner ist die Entfernung des Punktes C von den Punkten der Sehne A B eine Konstante, denn die Sehne A B gehört ja auch zu der Schaar der Kreise, die C zum Mittelpunkt haben.

Wir können diese Entfernung auch leicht ausrechnen, wir wollen dies einmal thun. Wir gehen aus von der Formel:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. cos. } \frac{\Sigma xx'}{\sqrt{\Sigma xx \, \Sigma x'x'}}$$

Nun ist $\Sigma_{xx'} = 0$, da x' auf der Polaren von x' liegen soll, wir erhalten daher sofort als die gesuchte Entfernung:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. cos } 0 = \frac{2k}{i} \cdot \left[\frac{\pi}{2} + K\pi\right].$$

oder

$$M(xx') = k\pi\left[1 + \frac{2}{i}K\right], \text{ wo } K \text{ eine beliebige ganzzahlige}$$

Konstante sein möge.

Messen wir ferner von C aus nicht bis zur Verbindungs-
sehne A B, sondern bis zu den Punkten irgend eines anderen
der Kreise um C, so werden wir wieder diese Entfernungen,
wie es auch sein muss, unter sich gleich finden. Hieraus
folgt, dass auch die jedesmaligen Differenzen beider gemessenen
Entfernungen gleich sind, es ist dies ebenfalls ganz natürlich,
da es sich ja nur um die Radiendifferenz zweier concentrischer
Kreise handelt. Von diesen Verhältnissen wird der Beobachter
nun ausgehen, um die dritte Art der Kreise zu finden.
Er wird nicht sagen, diese Kurven stellen uns Kreise dar,
sondern er wird diese Curven ansehen als die geometrischen
Oerter der Punkte, die jedesmal einen konstanten senk-
rechten Abstand von der Linie A B haben. Wir können dieses
Resultat zusammenfassend auch so aussprechen:

„Der Beobachter erscheinen die Kreise dritter Art als
die äquidistanten Kurven zu einer gegebenen festen Linie."

Wir wollen nun sehen, dass wir noch weitere Eigenschaften
der Kreise konstatieren.

Wir stellen zunächst die Behauptung auf: Alle Radien
haben die Eigenschaft, die Kreise rechtwinklig (im Sinne der
hyperbolischen Maassgeometrie) zu treffen. Dies ist sehr leicht
analytisch nachzuweisen. Es sei der absolute Kegelschnitt,
auf ein Polardreieck bezogen, gegeben in der bekannten Form:

$x^2 + y^2 - t^2 = 0$. Wir wollen nun die Kreise betrachten,
die um $x=0,\ y=0$ und um $y=0,\ t=0$ gelegt sind, es sind

dies Kreise der ersten und der dritten Art.*) Die Gleichungsform der ersteren ist:

$$x^2+y^2=C^2t^2,$$

die Gleichungsform der letzteren:

$y^2-k^2t^2=C^2x^2$, wo C eine reelle oder imaginäre Constante sein möge. Wir werden im folgenden die ganz gleichlaufenden Beweise für beide Arten der Kreise der Kürze halber zusammen behandeln und einander gegenüberstellen.

Fig. 36.

Wir wählen einen Punkt $x'y't'$ auf einem der Kreise beliebig aus und konstruieren in ihm die Tangente. Die Gleichung derselben lautet für die Kreise

erster Art:

$$xx'+yy'-C^2tt'=0$$

dritter Art:

$$yy'-k^2tt'=C^2xx' \text{ oder:}$$
$$-C^2xx'+yy'-k^2tt'=0.$$

Hieraus ergeben sich die Linienkoordinaten der betreffenden Tangente als:

$$\frac{u'; \quad v'; \quad w'}{x'; \quad y'; \quad -C^2t'}$$

resp.

$$\frac{u'; \quad v'; \quad w'}{-C^2x'; \quad y'; \quad -k^2t'}$$

*) An sich genügt es, den Beweis für Kreise der ersten oder der dritten Art zu führen, von da aus folgt das allgemeine Resultat nach dem Prinzip von der Allgemeinheit der Analysis.

Diese Linie, welche den Punkt x' mit dem Mittelpunkt des Kreises $x=0;\ y=0$ resp. $y=0;\ t=0$ verbindet, ist dargestellt durch:

$$y'x - x'y = 0 \qquad \text{resp.} \qquad t'y - y't = 0$$

oder in Liniencoordinaten durch:

$$\frac{u'';\ v'';\ w''}{y';\ -x';\ 0} \qquad \frac{u'';\ v'';\ w''}{0;\ t';\ -y'}.$$

Wir haben nun zu zeigen, daß die beiden Linien u' und u'' auf einander senkrecht stehen. Um zunächst allgemein die Bedingung der Orthogonalität zweier Linien zu finden, stellen wir die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in Liniencoordinaten dar, dieselbe lautet:

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{4k^2} w^2 = 0.$$

Polarisieren wir dieselbe, so erhalten wir unmittelbar in der Form:

$$u'u'' + v'v'' - \frac{w'w''}{4k^2} = 0$$ die gewünschte Bedingung; denn diese Gleichung giebt an, daß das unserer Maaßbestimmung zu Grunde liegende charakteristische Doppelverhältnis für die Linien u' und u'' den Wert -1 annimmt.

Setzen wir nun in diese Gleichung für u', v', w' und u'', v'', w'' jedesmal die gefundenen Werte ein, so sehen wir, dieselbe wird identisch befriedigt. Hiermit ist bewiesen, was wir behauptet haben.

„Jeder Kreis schneidet auch in der hyperbolischen Geometrie seine Radien senkrecht."

Wir können diese Eigenschaft geradezu als Definition des Kreises wählen und daher auch den Satz aussprechen: „Concentrische Kreise sind die rechtwinkligen Trajectorien eines Büschels."

Wir wollen nun noch in einem letzten kleinen Kapitel betrachten: „die Kinematik in der hyperbolischen Geometrie." Was haben wir allgemein unter „Kinematik" zu verstehen?*) Wir fassen unter diesem Namen die Untersuchungen über die Bewegungen und kongruenten Verschiebungen der Figuren in der Ebene zusammen." Wir hätten die kongruenten Bewegungen auch bereits in der gewöhnlichen Geometrie vom projectiven Standpunkte aus betrachten können und nur um den ersten Teil der Vorlesung noch vor Weihnachten zu beenden, sind wir dazu geführt, es bis jetzt aufzusparen. Wir wollen daher im folgenden zwischendurch auch auf die Bewegungen in der Ebene der gewöhnlichen Geometrie eingehen.

Die allgemeinste projective Beziehung zweier Ebenen wurde bekanntlich gegeben durch die Gleichungen

---

*) Es wird vielleicht auffallen, daß wir alle diese Untersuchungen erst in der hyperbolischen Maßgeometrie anstellen, in der Behandlung der elliptischen Geometrie sind wir darüber hinweggegangen. Es ist dies einfach aus dem Grunde geschehen, weil jetzt uns die direkte Anschauung infolge der Realität des absoluten Kegelschnittes zu Hilfe kommt.

$$\rho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 ;$$
$$\rho x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 ;$$
$$\rho x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 .$$

Während wir nun bei diesen Formeln bisher die x und x' als Punkte verschiedener Ebenen gedeutet haben, wollen wir uns jetzt die Vorstellung bilden, daß durch x und x' Punkte derselben Ebene dargestellt würden. Es wird dann durch unsere Formeln jedem Punkte der Ebene ein anderer Punkt dieser Ebene zugeordnet. Die nächste Frage zeigt uns sofort den Unterschied von unserer bisherigen Deutung der Substitutionsformeln, sie wird eben erst bei der neuen Deutung möglich. Um die Frage zu beantworten, werden wir $x' = x$ setzen, es sollen dann x_1, x_2, x_3 und ρ so bestimmt werden, daß die 3 Gleichungen bestehen:

$$(a_{11} - \rho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 ;$$
$$a_{21} x_1 + (a_{22} - \rho) x_2 + a_{23} x_3 = 0 ;$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \rho) x_3 = 0 .$$

Fällt diese 3 Gleichungen nicht allein durch das Wertesystem $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ befriedigt werden sollen, das für uns bedeutungslos ist, muß die Determinante der Coefficienten gleich 0 sein. Es ergiebt sich also als Resultat der Elimination von x_1, x_2, x_3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist eine kubische

Gleichung für ϱ, welche uns im allgemeinen drei von einander verschiedene Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ liefert. Jede dieser Wurzeln für ϱ in die ursprünglichen Gleichungen substituiert, liefert uns drei zusammengehörige Werthe für $x_1 : x_2 : x_3$. Es ist nämlich für $\varrho = \varrho_i$ eine der 3 Gleichungen Folge der beiden anderen, wir können sie einfach weglassen und erfahren dann aus den beiden anderen $x_1 : x_2 : x_3$. Wir erhalten daher das Resultat, daß drei Punkte der Ebene bei der Transformation in sich selbst übergehen. Diesen Satz können wir, wie leicht zu sehen, sofort verallgemeinern:

„Wenn man in Gebiet von n homogenen Variabelen durch eine lineare Substitution in sich selbst transformiert, so giebt es dabei n festbleibende Punkte," um jeden Einwand in Betreff der Allgemeinheit dieses Satzes von vornherein zu beseitigen, fügen wir noch hinzu, „vorbehaltlich näherer Untersuchungen in speciellen Fällen, wo vielfache Wurzeln jeder Gleichungen auftreten."

Nachdem wir uns so gewöhnt haben, eine Ebene perspectivisch oder collinear auf sich selbst zu beziehen, fragen wir uns weiter: Welche Collineationen haben speciell den Charakter der Bewegung, mit anderen Worten, welche Collineationen kommen einfach darauf hinaus, daß mit der Ebene nur eine congruente Verschiebung vorgenommen ist? Wenn wir in der gewöhnlichen Ebene

Bewegungen irgend welcher Figuren ausführen, so bleiben alle Maassverhältnisse dieselben. Es hängt dies damit zusammen, daß die unendlich ferne Gerade oder vielmehr die imaginären Kreispunkte von den Bewegungen der Ebene nicht berührt werden; wir müssen darauf später noch zurückkommen. So werden wir auch in der hyperbolischen Geometrie diejenigen Collineationen, bei denen die Maassverhältnisse dieselben bleiben, als bloße Bewegungen der Ebene bezeichnen. Wir können nun offenbar hier gleich einen Schritt weiter gehen und sagen:

„Bei der hyperbolischen Maßbestimmung werden alle Maßverhältnisse bei denjenigen und nur bei denjenigen Collineationen der Ebene in sich erhalten bleiben, welche die Eigenschaft haben, den absoluten Kegelschnitt in sich überzuführen."

Infolge dessen wollen wir diese Collineationen als Bewegungen der hyperbolischen Ebene in sich bezeichnen, und die Lehre von den Bewegungen dieser Ebene gibt nun eben das, was wir als „Kinematik" der hyperbolischen Geometrie bezeichnen wollen.

Suchen wir nun uns darüber klar zu machen, wie viele Bewegungen in der hyperbolischen Geometrie es überhaupt geben mag. Wir sehen zunächst, es gibt ∞^8 Collineationen, da von den 9 Constanten, die eine Collineation bestimmen, nur ihr Verhältnis wesentlich ist. Diese ∞^8 Collineationen werden

einen gegebenen Kegelschnitt wieder einem Kegelschnitt entsprechen lassen. Nun gibt es ∞^5 verschiedene Kegelschnitte in der ganzen Ebene; daraus schließen wir, daß es ∞^3 Collineationen des gegebenen Kegelschnittes in sich gibt – ebenso ∞^3 Collineationen, die einen gegebenen Kegelschnitt in einen beliebigen anderen gegebenen Kegelschnitt überführen. Dies ist ein sehr wichtiger Satz, den wir so gefunden haben, auch für andere Gebiete der Mathematik:

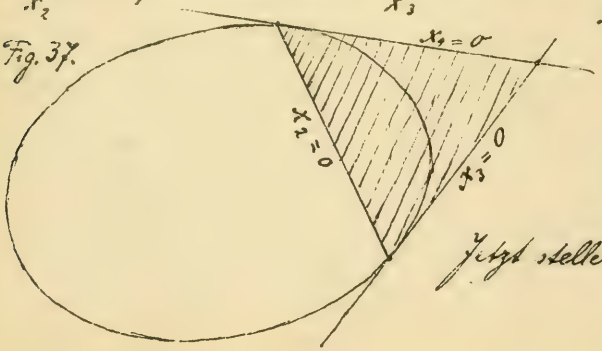
„Ein Kegelschnitt der Ebene geht durch dreifach unendlich viele Collineationen der Ebene in sich über, und es gibt also in der hyperbolischen Geometrie dreifach unendlich viele Bewegungen."

Es sei jetzt der absolute Kegelschnitt der hyperbolischen Maassbestimmung wirklich gezeichnet. Wir haben nun früher gelernt, den einzelnen Punkt des Kegelschnittes durch einen Parameter λ zu bezeichnen. Wir gingen davon aus, daß der Kegelschnitt, auf ein Tangentialdreieck bezogen, in der Form $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ dargestellt sei. Setzen wir dann $\frac{x_1}{x_2} = \lambda_1$, so wird auch $\frac{x_2}{x_3} = \lambda$ oder:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^2 : \lambda : 1 = \lambda_1^2 : \lambda_1\lambda_2 : \lambda_2^2,$$

wo noch $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ gesetzt ist.

Fig. 37.



Jetzt stellen wir die Frage auf:

Wann wird durch eine Collineation der Ebene unser Kegelschnitt in sich selbst übergeführt? Soll dies stattfinden, so muß zu jedem Punkte des Kegelschnittes ein neuer Punkt desselben werden. Der transformierte Kegelschnitt wird infolge dessen durch die Gleichung:
$x_1' : x_2' : x_3' = \lambda_1'^2 : \lambda_1' \lambda_2' : \lambda_2'^2 = \lambda'^2 : \lambda' : 1$ dargestellt.
Zwischen den Parametern λ und λ' muß dann eine bestimmte Beziehung bestehen, die wir zunächst unbestimmt ausdrücken wollen durch $\lambda' = \varphi(\lambda)$. Was wird dies nun für eine Funktion φ sein? Wir wollen dies auf zwei verschiedene Weisen ableiten: einmal, indem wir functionentheoretisch schließen, dann jedoch auch vermittelst analytischer Rechnung, damit der Weg mit Hülfe der Functionentheorie, den wir später übrigens noch öfter, da er einfacher ist, einschlagen werden nicht gewissermaßen als ein deus ex machina erscheint, sondern in engem Zusammenhang mit unseren bisherigen Betrachtungen tritt - wenngleich gewöhnlicher Rechnung jedesmal controlierbar erscheint.
Wenn wir die ganze Ebene einer Collineation unterwerfen, so ist dies doch eine umkehrbar eindeutige Transformation der Punkte der Ebene. Also wird auch der Kegelschnitt, wenn er einmal in sich selbst übergeht, eindeutig in sich selbst übergeführt werden. Wir erkennen

so, daß λ eine eindeutige Funktion von λ' sein muß, deren Umkehrung eine eindeutige Funktion von λ als Beziehung von λ' ergeben muß, und zwar ohne jede Ausnahme etwa für einzelne Werte von λ oder λ'.

Nun sagen wir weiter: es muß aber auch eine analytische Funktion sein, bei der alles bisher von ihr Ausgesagte ebenso wohl für imaginäre wie für reelle Werte von λ oder λ' gilt.

Wir nehmen dies so: λ hängt in analytischer Weise von x ab, die x aber werden analytisch transformiert in die x', von den x' hängt wieder λ' analytisch ab, folglich ist auch die Beziehung zwischen λ und λ' eine analytische. Also ist φ eine eindeutige, eindeutig umkehrbare analytische Funktion, die nirgendwo, auch beispielsweise bei $\lambda = \infty$ nicht, sich „wesentlich" singulär verhält. Hieraus folgt sofort, wie in der Funktionentheorie gezeigt wird, daß φ nur eine linear gebrochene Funktion sein kann.

Wir haben:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{oder homogen geschrieben:}$$

$$\begin{aligned} \varrho\,\lambda_1' &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2\,, \\ \varrho\,\lambda_2' &= \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2\,. \end{aligned}$$

Es ist der so gefundene Satz sehr wichtig, besonders wichtig für spätere Entwicklungen. Wir haben also

das zunächst funktionentheoretisch gefundene Resultat:
„Wenn bei einer Collineation einer Ebene in sich ein Kegelschnitt in sich verwandelt wird, so erfährt der Parameter λ, durch den wir den einzelnen Kegelschnittpunkt darstellen, selbst eine lineare gebrochene Substitution oder die homogenen λ_1 und λ_2, in welche man λ spaltet, eine binäre lineare Substitution." Wir wollen gleich noch hinzufügen:
„Eine Behauptung, welche auch genau umkehrbar ist, so daß jede lineare Substitution des λ auf eine Collineation hinführt, die die ganze Ebene und dabei den Kegelschnitt in sich selbst überführt."

Wir wollen jetzt kurz noch die analytische Rechnung durchführen, die uns zu eben diesen Resultaten führen wird. Wir gehen wieder darauf zurück, daß der absolute Kegelschnitt, auf ein Tangentialdreieck bezogen, in der Form gegeben ist: $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ oder, indem wir die Parameterdarstellung wählen, durch

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

Es sei nun eine Collineation gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \,; \\ \varrho\, x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \,; \\ \varrho\, x_3' &= a_{31} x_1 + a_{33} x_2 + a_{33} x_3 \,. \end{aligned}$$

Diese Collineationen soll die Eigenschaft haben, den absoluten Kegelschnitt in sich selbst überzuführen. Nach der Substitution muß daher derselbe wieder durch die Gleichung dargestellt werden: $x_1' x_3' - x_2'^2 = 0$. Setzen wir also in diese Gleichung für x_1', x_2', x_3' die Werte der Substitutionsformeln ein, so müssen wir links ein Multiplum von $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ erhalten. Wir können demnach setzen:

$x_1' x_3' - x_2'^2 = \varrho^{(u)}(x_1 x_3 - x_2^2)$ oder nach Auflösung der Substitution:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)^2 = \varrho^{(u)}(x_1 x_3 - x_2^2).$$

Da diese Gleichung dann für jeden Wert von x_1, x_2, x_3 identisch erfüllt sein muß, so ergeben sich eine ganze Reihe Bedingungsgleichungen, denen die Coefficienten der Transformation notwendig genügen müssen, die aber auch gerade hinreichend sein würden, damit durch die angegebene Substitution der absolute Kegelschnitt in sich transformiert wird. Es wird so z. B. der Coefficient von x_3^2 links gleich 0 sein müssen. Dies ergibt die Bedingung $a_{13}\,a_{33} - a_{23}^2 = 0$

Wir wollen die übrigen Bedingungen nicht weiter

ausrechnen, sondern gleich den Zusammenhang von λ und λ' aufsuchen. Es ist nach Einführung der Parameterdarstellung für den transformierten Kegelschnitt: $\lambda' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2'}{x_3'}$ oder, wenn wir beide Ausdrücke in einen zusammenziehen wollen: $\lambda' = \frac{m x_1' + n x_2'}{m x_2' + n x_3'}$, wo wir für m und n irgend welche Zahlen wählen können. Wir wollen setzen: $\lambda' = \frac{a_{23} x_1' - a_{13} x_2'}{a_{23} x_2' - a_{13} x_3'}$.

Wir werden gleich erkennen, weshalb gerade diese Darstellung genügt. Wenn wir nämlich für x_1', x_2', x_3' ihre Werte aus den Substitutionsformeln einsetzen, so kommt:

$$\lambda' = \frac{a_{23}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) - a_{13}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3)}{a_{23}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) - a_{13}(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3)}$$

und hier heben sich jetzt, im Zähler wie im Nenner, im Nenner wegen der von uns gefundenen Bedingung $a_{13} a_{33} - a_{23}^2 = 0$, die Glieder mit x_3 genau fort. Wenn wir nun Zähler und Nenner noch durch x_2 dividieren, so kommt, da $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ ist:

$$\lambda' = \frac{a_{23}(a_{11}\lambda + a_{12}) - a_{13}(a_{21}\lambda + a_{22})}{a_{23}(a_{21}\lambda + a_{22}) - a_{13}(a_{31}\lambda + a_{32})} = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}.$$

Wir sehen, daß in der That λ' eine lineare gebrochene Funktion von λ wird. Hierdurch ist dann dargelegt,

dass wirklich das funktionentheoretisch gefundene Resultat richtig ist. *)

Kehren wir nun zu den früheren Betrachtungen zurück. Wir haben gelernt, dass bei jeder Collineation 3 Punkte fest bleiben. Nun sehen wir, dass unsere specielle Collineation, bei welcher der absolute Kegelschnitt in sich selbst übergeht, die Eigenschaft hat, dass zwischen den Parametern λ und λ' die Beziehung besteht:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \text{ oder homogen geschrieben: } \begin{aligned} \varrho\lambda_1' &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ \varrho\lambda_2' &= \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2. \end{aligned}$$

---

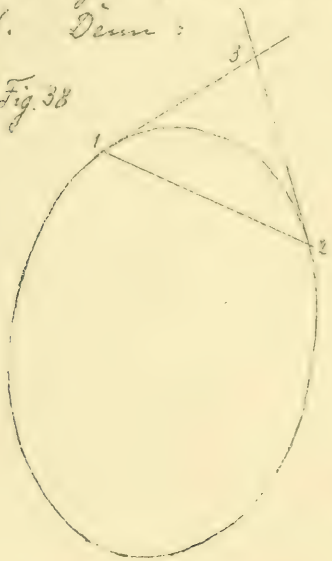
*) Wir wollen jedoch darauf hinweisen, dass diese Verificierung des funktionentheoretischen Beweises nicht erforderlich war, da der erste Beweis natürlich ebenso streng ist; es ist dies nur geschehen, um mit der Natur jenes Schlussverfahrens leichter vertraut zu machen. — Rückwärts sollte jetzt im Texte gezeigt werden (was der Kürze halber unterbleibt), dass auch jede Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$, auf den Kegelschnitt gedeutet, eine Collineation der Ebene ergiebt. In den drei Constanten $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ haben wir dann den Beleg dafür, dass es wirklich dreifach unendlich viele Collineationen der Ebene giebt, die den Kegelschnitt in sich überführen.

In Worten lautet dieses Ergebnis:

„Wenn die x der Ebene eine ternäre Substitution erfahren, bei welcher der Kegelschnitt in sich übergeht, so erleiden die λ_1, λ_2 auf dem Kegelschnitte eine binäre Substitution."

Wir können hieraus sofort schließen, daß zwei Punkte des Kegelschnittes fest bleiben, gemäß des früher ausgesprochenen allgemeinen Satzes. Wenn wir diese beiden Punkte einmal als reell zeichnen, so sehen wir auch sogleich, welches der dritte feste Punkt der Bewegung ist. Denn:

Fig. 38



Mit den beiden Punkten des Kegelschnittes bleiben auch ihre Tangenten und damit der Schnittpunkt derselben fest, womit die sämmtlichen 3 festbleibenden Punkte der Ebene bestimmt sind."

Dies gilt dann sofort allgemein, unabhängig von den gerade vorliegenden Realitätsverhältnissen.

Wir können übrigens die folgenden 3 Fälle unterscheiden: Sind die festbleibenden Punkte des Kegelschnittes reell, so liegt der dritte feste Punkt außerhalb des Kegelschnittes. sind die ersteren Punkte konjugiert imaginär, so liegt der dritte feste

Punkt im Inneren des Kegelschnittes. Endlich haben wir noch als Übergangsfall den Fall zu betrachten, wo die beiden festbleibenden Punkte des Kegelschnittes in einen reellen Punkt zusammenfallen, dann fällt auch der dritte feste Punkt in diesen hinein. Wir nennen nun eine Bewegung, bei der der reelle Punkt 3 festbleibt, eine Drehung um 3 nennen; jeder Punkt wird dann bei der Bewegung der hyperbolischen Ebene einen Kreis um jenen Punkt 3 beschreiben müssen, da doch sein Abstand vom Punkte 3 konstant bleiben soll. Wir haben so zusammenfassend das Ergebnis:

„Hiernach besteht jede Bewegung der hyperbolischen Ebene aus einer Drehung, bei welcher ein Punkt der Ebene, der innerhalb oder außerhalb oder auf dem Kegelschnitte liegt, festbleibt."

Wenn wir uns nun weiter fragen, wie sich die Bewegung dann dem mit hyperbolischer Maßbestimmung ausgerüsteten Beobachter darstellen wird, so können wir in Rücksicht auf die 3 unterschiedenen Fälle sagen:

„Liegt der feste Punkt im Inneren des Kegelschnittes, so hat man eine Drehung ganz wie in der elementaren Geometrie, die bei einer Drehung um 2π in die ursprüngliche Lage zurückführt (Fig. 39.). Im zweiten Falle hat man eine Bewegung um ein äußeres Centrum, wobei alle Punkte Horocyclen beschreiben, und man

niemals zur Anfangslage zurückkommt. (Fig. 40.)
Im dritten Falle haben wir gleichfalls eine unperiodische (d. h. eine nicht zur Anfangslage zurückführende) Bewegung, bei der alle Punkte etwa von der Stelle 2 aus nach der Stelle 1 hin zu wandern scheinen. (Fig. 41.)

Dieser dritte Fall wird jedoch dem Beobachter offenbar nicht als eine Drehung der Ebene erscheinen, (weil er sich kein Zentrum der Bewegung konstruieren kann), vielmehr wird er von dieser Bewegung sagen:

„Bei der dritten möglichen Bewegungsart wird eine gerade Linie in sich selbst verschoben, und alle Punkte der Ebene beschreiben kongruidistante Curven, (nicht etwa gerade Linien, wie bei der gewöhnlichen Parallelverschiebung)."

Fig. 39.

Fig. 40.)

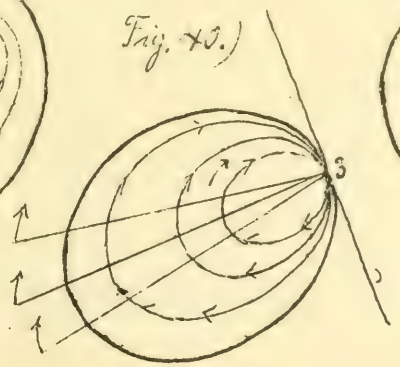
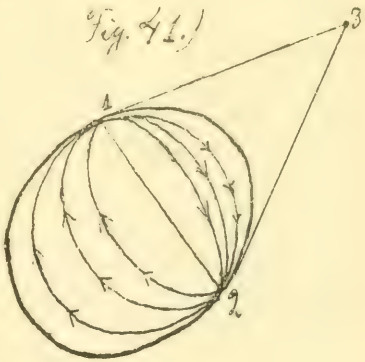


Fig. 41.)



Es besteht jedoch, was die Kinematik angeht, noch ein anderer fundamentaler Unterschied der hyperbolischen von der gewöhnlichen Maßgeometrie.

Wir haben in der ersteren dreifach ∞-viele Bewegungen als möglich erkannt, ebenso viele Bewegungen gibt es auch im Falle der gewöhnlichen Geometrie. Im Falle der hyperbolischen Geometrie haben wir diese ∞^3 Bewegungen soeben schlechtweg als diejenigen Collineationen definiert, die den absoluten Kegelschnitt in sich überführen. Das Gleiche könnte man nun, sollte man meinen, von der gewöhnlichen Geometrie behaupten und sagen: Die Bewegungen der gewöhnlichen Ebene sind die Collineationen, bei denen die Kreispunkte in sich übergeführt werden. Dieser Satz ist nicht richtig, wohl aber seine Umkehr, daß es sich nämlich bei jeder Bewegung um eine Collineation handelt, bei der die Kreispunkte unverändert bleiben. Es gibt aber noch andere Collineationen, bei denen die Kreispunkte in sich übergeführt werden, ohne daß dies Bewegungen sind. Wir erkennen dies leicht so: Es gibt überhaupt ∞^8 Collineationen, Punktepaare dagegen gibt es ∞^4. Wir schließen hieraus, daß jedes Punktepaar durch ∞^4 Collineationen in sich übergeführt wird: „Der hyperbolischen Theorie entgegen bleiben daher in der gewöhnlichen Geometrie die Kreispunkte bei vierfach unendlich vielen Collineationen ungeändert,

trotzdem es nur dreifach unendlich viele Bewegungen giebt."

Wir können dies leicht noch weiter verfolgen. Die Winkel zweier Strahlen müssen bei den in Rede stehenden Transformationen ungeändert bleiben, da sie definiert sind davon das Doppelverhältnis dieser Strahlen mit den Strahlen nach den imaginären Kreispunkten, dagegen die Entfernungen brauchen nicht dieselben zu bleiben, weil sie überhaupt nicht durch die Kreispunkte allein, sondern erst nach Annahme der Längeneinheit definiert waren, vielmehr können sie proportional vergrößert oder verkleinert werden. Wir können so unserem letzten Satze noch hinzufügen:

„Es liegt dies eben daran, weil zu den Bewegungen noch die Aehnlichkeitstransformationen ($x' = mx$, $y' = my$) als Collineationen, die die Kreispunkte ungeändert lassen, hinzutreten."

Wir wollen diesem Satze jedoch die umgekehrte Wendung geben; denn uns liegt daran, die Abweichung der gewöhnlichen und hyperbolischen Geometrie darzulegen. Wir sagten schon, daß es im hyperbolischen Falle nur ∞^3 Collineationen giebt, die den fundamentalen Kegelschnitt in sich transformieren.

„Für die Aehnlichkeitstransformation ist in der

hyperbolischen Geometrie daher ebenso wenig Platz, wie in der elliptischen Geometrie."

Wenn wir uns daher einmal die Aufgabe stellen wollten, in der hyperbolischen Geometrie zu einem gegebenen Dreieck ein anderes jenem ähnliches zu zeichnen, das vielleicht den doppelten Inhalt hat, so werden wir bald einsehen, daß diese Aufgabe zu lösen undenkbar ist. Wir wissen dies eigentlich schon von früher her. Denn, wie wir gesehen, drückt sich der Inhalt eines Dreiecks aus durch $\Delta = 4k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$. Wenn es daher möglich wäre, ein dem ersten ähnliches Dreieck mit doppeltem Inhalt zu zeichnen, so müßte ja auch der Excess sich verdoppelt haben, was zu einem Widerspruch mit der Forderung der Aehnlichkeit führt, die doch Winkelgleichheit verlangt.

„Die Bemerkung, daß es keine Aehnlichkeitstransformationen giebt, stimmt daher mit dem Umstande, daß wir den Inhalt eines Dreiecks durch die Winkel allein berechnen können."

Dieses giebt uns noch Anlaß zu folgender kleinen Betrachtung. Wir fragen uns: Welches ist der größte Inhalt, den ein Dreieck überhaupt in der hyperbolischen Geometrie haben kann? Diese Frage ergiebt sich sofort identisch mit der, welches die kleinsten Winkel

sind, die in einem Dreieck vorkommen können. Wir erinnern uns, daß wir bereits ein Dreieck betrachtet haben, dessen 3 Ecken auf dem Kegelschnitte lagen; in ihm war jeder Winkel gleich 0. Kleiner können die Winkel natürlich nicht werden.

„Wir kommen so zu dem merkwürdigen Ergebnis, daß es in der hyperbolischen Geometrie ein Maximum für den Dreiecksinhalt giebt, nämlich die Zahl $+k^2\pi$."

Anmerkung: Wir werden bald Gelegenheit haben, auf diesen Satz zurückzukommen. Wenn wir die historische Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie betrachten, dann müssen wir auf einen Brief des jugendlichen Gauß an seinen Studiengenossen Bolyai vom Jahre 1799 aufmerksam machen. Hier sagt Gauß: Man könne sich eine Geometrie konstruieren, für die das Parallelenaxiom nicht gültig sei. Wenn man jedoch annehme, daß es für den Dreiecksinhalt eine obere Grenze nicht gebe, so könne man die euklidische Geometrie beweisen. Anderenfalls käme man zu einer anderen Geometrie, (nämlich eben derjenigen, welche wir hier die hyperbolische Geometrie nennen.)
(v. Schering, Gedächtnisrede zum 100. jähr. Geburtstage von Gauss, pag. 7. (1877.)).

Wir wenden uns nun noch kurz zu der

3. parabolischen Maassbestimmung. Indem wir

uns der früheren Entwickelungen für das binäre Gebiet erinnern, dürfen wir gleich die allgemeine Definition an die Spitze stellen:

„Die parabolische Geometrie ist ein Grenzfall der elliptischen Geometrie oder der hyperbolischen, welcher entsteht, wenn der absolute Kegelschnitt sich in ein Paar imaginärer Punkte auflöst und gleichzeitig k bezw. k' ins Unendliche wächst."

Statt des Wortes „Grenzfall" wollen wir noch ergänzend hinzufügen.

„Sie ist auch ein Übergangsfall zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie, insofern das Paar imaginärer Punkte ein Übergangsfall zwischen einteiligen und mehrteiligen Kegelschnitten ist."

Wir wollen jetzt auf die parabolische Geometrie selbst eingehen, aber nur ganz kurz. Derselben liegen also 2 imaginäre Punkte als absoluter Kegelschnitt zu Grunde, ganz dementsprechend, daß wir bei der gewöhnlichen Maaßbestimmung in der Ebene die beiden Kreispunkte zu Grunde zu legen hatten. Wir wollen nun in der That zeigen:

„Wir erhalten im parabolischen Falle ein Formelsystem, welches sich mit dem der gewöhnlichen Geometrie deckt, sobald wir die imaginären Grundpunkte insbesondere mit den Kreispunkten

zusammenfallen lassen."

Wir wollen nun der Gl. des absoluten Kegelschnittes in Liniencoordinaten aufsuchen; dieselbe möge lauten

$$\Phi(u_1\ u_2\ u_3) = \sum a_{ik}\, u_i\, u_k = 0.$$

Wir erhalten hieraus in bekannter Weise die Darstellung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten, wenn wir die Determinante der Coefficienten mit den x ränderen, wie folgt:

$$\mathfrak{F}(x_1\ x_2\ x_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = \sum A_{ik}\, x_i\, x_k .$$

Nun wollen wir von dieser Gleichung $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ wieder übergehen zur Gleichung in Liniencoordinaten, welche durch die mit $u_1\ u_2\ u_3$ geränderte Determinante der Coefficienten gegeben wird, dieselbe lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es ist dann, wie bereits früher dargelegt, die linke Seite

identisch $= \Delta \cdot \Phi(u_1\ u_2\ u_3)$, wo Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$ bezeichnet. Diesen Formelcyklus werden wir im

Folgenden zu benutzen haben.

Wir wollen nun den Winkel zweier geraden Linien u und u' definieren durch:

$$M(uu') = \text{arc. cos.} \frac{\Phi(uu')}{\sqrt{\Phi(uu) \cdot \Phi(u'u')}}$$ in uns bereits bekannter Weise; hieran ändert sich nichts, auch wenn wir jetzt, um zum parabolischen Falle zu kommen, die Determinante von Φ gleich Null setzen sollten.

Zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte dagegen wollen wir uns der arc. sin.-Formel bedienen, da diese für den beabsichtigten Grenzübergang am geeignetsten ist. Wir setzen:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{arc. sin.} \frac{i\sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{F_{xx} \cdot F_{x'x'}}},$$ wo $S_{xx'}$

nichts anderes ist als die mit u_1, u_2, u_3 gerändert Determinante der Coefficienten a, wenn wir für u_1, u_2, u_3 bezw. einsetzen: $(x_2 x_3' - x_3 x_2')$, $(x_3 x_1' - x_1 x_3')$, $(x_1 x_2' - x_2 x_1')$. Wir wollen nun mit $(xx')_k$ diejenige zweigliedrige Unterdeterminante der x bezeichnen,

die den Index k nicht enthält, also sei z. B.
$(x_2 x_3' - x_3 x_2') = (xx')_i$. Dann können wir setzen:

$$S_{xx'} = \Delta \cdot \sum_r a_{ik} (xx')_i \cdot (xx')_k \quad .$$ Setzen wir dies ein, so wird:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. sin } \frac{i\sqrt{\Delta}\sqrt{\sum a_{ik} (xx')_i (xx')_k}}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k \cdot \sum a_{ik} x_i' x_k'}} \quad .$$

In dieser so umgeformten Formel für M können wir nun leicht den Grenzübergang zum parabolischen Falle vornehmen. Wir werden die Bedingung einzuführen haben, daß $\Delta = 0$ wird; denn dies besagt ja, daß der Kegelschnitt in ein Punktepaar ausgeartet ist, setzen jedoch zunächst, wie es natürlich ist, Δ gleich einer unendlich kleinen Größe. Dann stimmt der arc. sin mit seinem Argumente selbst überein.

Wir erhalten daher:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \cdot i \frac{\sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{\sum a_{ik} (xx')_i (xx')_k}}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k \cdot \sum a_{ik} x_i' x_k'}}$$

Nun wollen wir k in derselben Weise größer und größer werden lassen, als $\sqrt{\Delta}$ ∞ klein wird. Es möge also beim Grenzübergange $2k \cdot \sqrt{\Delta} = l$ werden, wo l eine beliebige endliche Konstante ist, die der Willkür der zu wählenden Längeneinheit entspricht.

So erhalten wir:

$$M(xx') = l \cdot \frac{\sqrt{a_{ik}(x,x')_i (xx')_k}}{\sqrt{\sum x_{ik} x_i x_k \cdot \sum a_{ik} x'_i x'_k}}$$

während der Ausdruck für den Winkel M, wie schon gesagt, nach wie vor ungeändert bleibt. Unser Resultat ist daher:

„Für die parabolische Maassbestimmung, bei welcher die Curve 2. Classe zu einem Punktepaar wird, bleibt die Formel für den Winkel M zweier Geraden ganz die alte, während die Formel für den Abstand M zweier Punkte bei a verschwindendem k die zuletzt aufgestellte Gestalt annimmt."

Jetzt wird, wie wir sagten, unser Zielpunkt sein, nachzuweisen, dass, wenn wir insbesondere für $\Phi = 0$ die Kreispunkte wählen, die Formeln in die bekannten Formeln der gewöhnlichen Maassgeometrie übergehen. Die Kreispunkte seien gegeben durch die Gleichung:

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 = 0. \quad \text{Dann wird:}$$

$$M(uu') = \text{arc. cos.} \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}};$$

Dies ist gewiss die gewöhnliche Formel für den Winkel

zweier geraden Linien.

Berechnen wir nun den Ausdruck F, so wird dies folgende Determinante sein:

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = -x_3^2,$$ d.h. gleich 0 gesetzt die Gleichung der doppelt zählenden unendlich fernen Graden.

Dementsprechend erhalten wir folgenden Wert des Abstandes:

$$Ab(xx') = \frac{l\sqrt{(x_2x_3' - x_3x_2')^2 + (x_3x_1' - x_1x_3')^2}}{x_3x_3'}.$$

Auch dies ist die gewöhnliche Formel für die Entfernung zweier Punkte.

Setzen wir nun noch $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, so ergiebt sich die gewöhnliche Formel der elementaren analytischen Geometrie: $Ab(xx') = l\sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}$.

Wir haben daher, die parabolische Maassbestimmung abschliessend, das Resultat:

„Die gewöhnliche Maassbestimmung in der Ebene ist uns ohne weiteres ein Beispiel dessen, was wir parabolische Maassbestimmung nennen. Die unendlich fernen Punkte, in welche sich bei der parabolischen Maass-

Bestimmung der fundamentale Kegelschnitt zerlegt hat, fallen bei ihr einfach in die beiden uns wohl bekannten Kreispunkte hinein."

So haben wir alles besprochen, was wir uns hinsichtlich der Cayley'schen Maassbestimmung vorgenommen haben. Wollen wir zur Unterscheidung der dreierlei in Betracht kommenden Maassgeometrieen noch ein bestimmtes Kennzeichen uns merken, so sei dies die Konstante k in der Definition von $M(xx') = k \log. D$. Wir können sagen, indem wir auf unsere Formeln zurückblicken:

Ist k reell, so liegt die hyperbolische Maassbestimmung vor. Ist k imaginär, so liegt die elliptische Maassbestimmung vor. Ist k gleich unendlich, so liegt die parabolische Maassbestimmung vor.

Doch statt von k zu sprechen, führt man gemeiniglich die Grösse $-\frac{1}{4k^2}$ ein; warum, werden wir gleich sehen. Wir erkennen zunächst:

Ist $-\frac{1}{4k^2}$ negativ, so haben wir die hyperbolische Maassbestimmung. Ist $-\frac{1}{4k^2}$ positiv, die elliptische, ist $-\frac{1}{4k^2} = 0$, die parabolische.

Was hat nun die Grösse $-\frac{1}{4k^2}$ für eine Bedeutung?

Wir haben gesehen, daß wir die Maassbestimmung jedesmal durch die Geometrie auf einer Hülfskugel vom Radius $r = \frac{2k}{i}$ interpretieren können, im speciellen haben wir im elliptischen wie im hyperbolischen Falle diese Beziehung näher betrachtet, im parabolischen Falle ist sie selbstverständlich. Wenn man nun im vorliegenden Falle das Imaginäre und zugleich das Unendliche vermeiden will – und es giebt Leute, die eine gewisse Scheu vor dem Imaginären wie dem Unendlichen haben – so bedient man sich zur Bezeichnung der Kugel der Größe $\frac{1}{r^2}$, die das „Krümmungsmaass" der Kugel ausdrückt.
[Es entspricht dies ganz den gewöhnlichen Anschauungen, die man in der Flächentheorie vom Wesen der Krümmung hat.] Dies $\frac{1}{r^2}$ wird nun gleich $-\frac{1}{4k^2}$.
Wir werden daher, die Anschauung auch wagen können:

„Die hyperbolische Maassbestimmung hat negatives Krümmungsmaass, die elliptische hat positives Krümmungsmaass, die parabolische hat verschwindendes Krümmungsmaass."

Dieser Satz besagt nicht mehr und nicht weniger als der vorhergehende, doch läßt er einem Mißver-

ständnisse freien Lauf. Die populäre Philosophie nämlich wirft, gelegentlich hier anknüpfend, den Mathematikern vor, daß sie der Ebene*) eine Krümmung beilegen wollten, ohne daß man doch sagen könne, nach welcher Seite denn eigentlich die Ebene krumm sei. Wir bemerken daher ausdrücklich: das Wort „Krümmungsmaaß" im hier vorliegenden Zusammenhang bezeichnet nur die Analogie, die man aus dem Umstande herausnimmt, daß man sich die Maaßverhältnisse der hyperbolischen und elliptischen ebenen Geometrie an den Verhältnissen einer gewöhnlichen Fläche, der Kugel, klar macht.

I. Nichteuklidische Geometrie im engeren Sinne.

Wir gehen nun über zu der Lehre von der nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinne. Wir werden hier die philosophische Frage zu streifen haben woher unsere Axiome stammen und wie weit wir die euklidischen Axiome etwa durch andere ersetzen können. Dies ist die tiefere Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie. Vor allen Dingen

*) und weiterhin dem Raume.

aber wollen wir eine historische Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie geben.

Stellen wir zunächst einmal die philosophische Frage voran: Unsere bisherige Betrachtung operierte mit den gewöhnlichen mathematischen Begriffen und construierte von ihnen ausgehend eine allgemeine Art der Maassgeometrie. Hat dies nun etwa Bedeutung für die Grundlagen der Geometrie überhaupt, nämlich für den Aufbau der von uns thatsächlich betrachteten Maassgeometrie? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir von der Thatsache ausgehen, die wir in den letzten Stunden öfter zu erwähnen Gelegenheit gehabt haben. Nehmen wir, noch auf dem Boden der euklidischen Geometrie stehend, $x\,y\,t$ als die homogenen rechtwinkligen Coordinaten. Es stellt dann: $x^2+y^2 \pm \frac{1}{k^2}t^2 = 0$ einen nullteiligen oder einteiligen Kreis dar, je nachdem wir das positive oder negative Vorzeichen wählen.

Wir wollen nun einmal die Voraussetzung machen, k^2 sei sehr groß, jedenfalls sehr groß gegenüber allen Entfernungen, mit denen wir in der Praxis zu thun haben. Um selbst den Astronomen mit ihren Sonnenweiten und Lichtjahren genug zu thun, sei etwa k bezw. $\frac{k}{i}$ (falls k imaginär sein sollte) durch eine 10 stellige Zahl in Lichtjahren ausgedrückt zu denken. Als specieller Fall sei auch $k = \infty$ heraus-

sichtigt. Gründen wir dann auf diesen grossen Kreis unsere Maassbestimmung, die wir durch $M(xx') = k \log. D$, und $M(uu') = -\frac{i}{2} \log. \Delta$ einführen, — werden dann die 3 Fälle der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Geometrie merklich verschiedene Resultate geben, die unserer Messung zugänglich sind? Es wird nicht schwer fallen, für $M(xx')$ resp. $M(uu')$ eine Reihenentwicklung nach fallenden Potenzen von k aufzustellen, wo die Glieder, die mit $\frac{1}{k}$ und höheren Potenzen von $\frac{1}{k}$ behaftet sind, bei den von uns angenommenen Werten von k und den relativ kleinen Entfernungen, die uns interessieren, doch sicherlich nicht ins Gewicht fallen, mag dies k reell oder imaginär sein.

Wir können jedenfalls daher sagen, (wie wir schon oben bei Gelegenheit bemerkten):

„Die dreierlei so hergestellten Maassbestimmungen unterscheiden sich in praktischer Hinsicht bei den Entfernungen, mit denen wir thatsächlich operieren, nicht merklich."

In theoretischer Hinsicht aber unterscheiden sie sich allerdings ganz wesentlich. Spielen wir einmal auf einen der Sätze über, die wir als Unterscheidungsmerkmal der 3 Fälle kennen. Wir wissen, in der hyperbolischen Geometrie giebt es zu einer gegebenen Geraden

durch einen Punkt ausserhalb zwei Parallelen, in der parabolischen nur eine, in der elliptischen endlich gar keine, da überhaupt im letzten Falle die Gerade eine endliche Länge hat, (freilich bei unserer Annahme betr. k sehr viel grösser als alle Längen, die wir je werden messen können, während in den beiden ersten Fällen die Gerade ∞ ist.)

„Auf die Frage nun, ob denn nicht nur mit unseren praktischen Operationen, sondern auch mit unserer Raumvorstellung, die sich doch immer nur auf einen kleinen Teil des Raumes bezieht, nicht ebensowohl die hyperbolische oder elliptische Massbestimmung verträglich sei, wie die parabolische, da antwortet man im Anschlusse an Gauss, dass dies in der That der Fall ist: man wählt die parabolische nur als die einfachste der dreierlei mit unserer Raumvorstellung verträglichen Geometrieen."

Bemerken wir, dass man in der That bei keiner bei Messungen noch Veranlassung gehabt hat, einen Widerspruch mit der parabolischen Geometrie wahrzunehmen. Man kann diese Messungen dahin concentrieren, dass man die Winkelsumme im Dreieck untersucht, wo im hyperbolischen Falle die

Winkelsumme $< \pi$, im parabolischen $= \pi$, im elliptischen $> \pi$ ist. Man könnte also unternehmen, ein grosses Dreieck zu nehmen und zu sehen, wie sich die Winkelsumme daselbst verhält. Dies ist auch bereits von Gauss geschehen gelegentlich der hannoverschen Landesvermessung. Das Dreieck wurde in diesem Falle gebildet von den festen Triangulationspunkten auf dem Brocken, dem Inselsberg und Hohenhagen. Gauss bestimmte die Winkel unter Anwendung von Heliotropen. Wenn man auf die Unzulänglichkeit der Instrumente, auf die Refraktion der Lichtstrahlen durch die Luft etc. Rücksicht nimmt, so wird man verstehen, dass die Winkelsumme in einem solchen Dreiecke niemals genau 180° sein kann. Die Frage muss sein, ob sich eine constante Abweichung von 180° nach der einen oder anderen Seite ergeben hat, die ausserhalb der Grenzen der Beobachtung liegt.

Und dieses ist nun weder mit den Gaussischen Messungen noch mit irgend welchen neueren Messungen der Fall gewesen. Daher also ist es berechtigt, $k = 0$ zu nehmen, (was die einfachste Hypothese ist), es ist aber nur bewiesen, dass k bzw. $\frac{1}{R}$ jenseits einer durch die Genauigkeit unserer Beobachtungen bedingten Grenze liegt.

Die Entwickelungen der letzten Stunde hatten den

Zweck vorläufig mit einer gewissen Überlegung bekannt zu machen. Den eigentlichen Gedanken der nichteuklidischen Geometrie haben wir damit nur erst gestreift. Wir legten ja auch noch die euklidische Geometrie unseren Beobachtungen zu Grunde. Wir nahmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem beschrieben den Kreis $x^2+y^2-4t^2=0$, nahmen diesen Kreis als reell an und definierten dann in Bezug auf ihn die Massbestimmungen, die sich von der gewöhnlichen Geometrie nun zwar unmerklich wenig unterscheiden, sofern wir nur die praktisch messbaren Entfernungen berücksichtigen, die dagegen ganz wesentlich, was die Theorie anbelangt, von ihr und unter einander verschieden sind. Offenbar kann es auf diesem Wege nie gelingen, der euklidischen Geometrie ein neues Fundament zu geben, wir würden uns nur im Cirkel bewegen. Wollen wir die Axiome und die Raumvorstellung der Euklidischen Geometrie zu prüfen im Stande sein, so müssen wir unsere Massbestimmungen unabhängig von den speciellen Euklidischen Annahmen begründen. Dies aber gelingt folgendermassen (wir geben den Verlauf des Gedankenganges nur erst in grossen Zügen an):

Wir nehmen an, es sei gelungen, nach dem Vorbilde v. Staudt's die projective Geometrie aufzubauen, ohne

irgend von den Maassverhältnissen des Raumes zu sprechen. Wir wissen also zu reden von den Punkten und graden Linien der Ebene und ihren Lagenverhältnissen zu einander, wir haben vor allem gelernt, die „Würfe" zu definieren vermittelst der Vierecks- und Vierseitskonstruktion und auf diese die Coordinatenbestimmung zu gründen. Doch fragen wir uns vorab noch, was wir von der gewöhnlichen Raumanschauung der projectiven Geometrie zu Grunde legten. Schon zu Anfang der Vorlesung haben wir auf den Unterschied der Raumanschauung hingewiesen, der sich darin ausspricht, ob wir mit dem Auge, mit dem Blick oder vermöge des Tastsinnes d.h. fühlend den Raum durchmessen. (Blickraum - Fühlraum). Gerade die ersten Eigenschaften des Raumes, die heute die Philosophie visuelle Eigenschaften im Gegensatze zu den mechanischen zu nennen pflegt, sind es, die bei der Begründung der projektiven Geometrie in Betracht kommen. Wenden wir dann im Besitz der projectiven Geometrie und von ihr ausgehend unsere Aufmerksamkeit den mechanischen Eigenschaften des Raumes zu, so wollen wir diese dahin zusammenfassen, dass man einen Körper von einem Ort zum anderen bewegen kann, ohne seine Grössenverhältnisse, seine Gestalt zu ändern.

Wir kommen so zu dem Begriff der Bewegung, und erkennen sofort, da bei den Bewegungen gerade Linien gerade Linien bleiben: Die Bewegungen des Raumes sind specielle Fälle der Collineation. Es wird dann nicht schwer sein zu zeigen, daß bei sämmtlichen Bewegungen einer Ebene in sich ein Kegelschnitt unverändert bleibt, je nachdem derselbe nullteilig oder einteilig ist oder in ein Punktepaar ausartet, werden wir den elliptischen, den hyperbolischen oder den parabolischen Fall zu unterscheiden haben. Dementsprechend werden wir in den Maassverhältnissen des Raumes nur einen besonderen Fall der Cayley'schen Maassbestimmung zu erblicken haben, wobei wir den thatsächlich vorliegenden Verhältnissen mit ausserordentlich grosser Genauigkeit ebensowohl durch die hyperbolische als die parabolische oder die elliptische Hypothese entsprechen können. Wir müßten eben absolut genau gemessen im Stande sein, wollten wir mit Bestimmtheit behaupten können, die parabolische und keine andere Maassbestimmung liegt in unserem Raum vor. — Der hiermit geschilderte Aufbau der Geometrie ist es, den wir als Nicht-Euklidische Geometrie bezeichnen.

Nun wird ja ein Philosoph sehr viel zu sagen wissen, ob es richtig ist, in solcher Weise über die Geometrie zu reden. Er wird die Frage aufwerfen, ob wir überhaupt durch einen logischen Aufbau ein

System der Maassbestimmung zu begründen und dieses unter Heranziehung der Beobachtungen auf unseren Raum anzuwenden berechtigt sind, oder ob wir nicht vielmehr in uns ein geheimnisvolles Organ besitzen, das uns gestattet ohne Weiteres mit absoluter Genauigkeit über alle Grundlagen der Geometrie zu entscheiden. Doch wollen wir diese Frage hier zunächst bei Seite lassen, indem wir es vorziehen vorerst einen historischen Überblick über die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie zu geben. Denn es ist klar, man kann erst dann ein Gebiet wissenschaftlichen Forschens von dem allgemein philosophischen Standpunkte aus zu beleuchten sich fähig halten, wenn man genau weiss, um was es sich handelt. Und hierzu ist am förderlichsten, dass man sich vertieft in den Gedankenkreis aller der Männer, die durch Schrift und Wort jenen wissenschaftlichen Zweig zu begründen und zu fördern bestrebt waren. Wie über die Fernwirkung der Kraft in der Physik philosophisch zu disputiren erst der sich berufen fühlen kann, der Physik kennt, so darf man auch in der Geometrie nicht über philosophische Betrachtungen anstellen, so lange man nicht von dem Gesammtinhalte der Geometrie eine gewisse Kenntnis sich erworben hat. So wollen wir denn jetzt zu

einer Ausführung der historischen Entwicklung der nicht-
euklidischen Geometrie eine hinwenden. Wir wollen zu-
nächst folgende 3 Bemerkungen noch vorausschicken:
1.) „Nichteuklidisch" kann man eigentlich nur die
Geometrie nennen, welche die parabolische Hypothese
verwirft. Doch wir sagen ja gar nicht, die parabolische Hypo-
these ist falsch, sondern wir sagen nur sie ist nicht
notwendig. Daher ist der Ausdruck „nichteuklidisch" oder
„antieuklidisch" nicht gut gewählt, besser ist das Wort
„Pangeometrie", welches sich eben darauf bezieht, daß man
alle 3 Hypothesen gleichberechtigt neben einander gelässt
und sich überlegt, zu welchen Resultaten jede einzelne
führt. Die Bezeichnung „nichteuklidisch," die auf C. F. aus
zurückgeht, ist von ihm auch nur in strengerem Sinne
des Wortes gebraucht.
2.) Ferner haben wir hervorzuheben: diese Systematik,
daß man die projective Geometrie an die Spitze stellt und
von ihr aus die 3 Möglichkeiten der Maassbestimmung
aufstellt, dieselbe ist durchaus modernen Ursprungs.
In gegenwärtiger Vorlesung haben wir ja diese Systema-
tik von vornherein in Aussicht genommen im An-
schlusse an die Abhandlung: „über die sogenannte Nicht-
euklidische Geometrie" in den mathem. Annalen vom
Jahre 1871. Bd. 4. Doch in den Untersuchungen, über die
wir jetzt zunächst zu berichten haben, ist von projektiver

Geometrie nicht die Rede. Vielmehr wird in ihnen ganz nach dem Muster der alten Euklidischen Darstellung gleich mit der neuen Maassgeometrie begonnen, indem man nur dadurch von Euklid abweicht, dass man die eine oder andere Annahme, Parallellinien betreffend, an die Spitze der Betrachtung stellt. Oder auch man beginnt mit analytischen Untersuchungen über denkbare Maassbestimmungen.

3.) Aber noch mehr als dies. In den Arbeiten der „ersten Periode" zu der wir uns sofort hinwenden, spricht man nur von der hyperbolischen und parabolischen Geometrie, nicht von der elliptischen. Der Grund ist einfach der: Man war zwar von Zweifel erfüllt an der Richtigkeit des Parallelenaxioms, aber man hielt an der Unendlichkeit der geraden Linie traditioneller Weise fest. Da nun in der elliptischen Geometrie die gerade Linie eine endliche Länge hat, so erklärt es sich, dass diese ausserhalb der Betrachtungen blieb. Erst der späteren Periode, die einen allgemeineren Standpunkt einnahm, (indem sie nicht nur das Parallelenaxiom in Zweifel zog,) war es vorbehalten, auch diesen Fall in gleicher Weise zu berücksichtigen. [Riemann].

Ziehen wir aus diesen Bemerkungen ein Facit, so dürfen wir sagen:

„In der älteren Periode bedeutet nichteuklidisch soviel wie hyperbolisch."

Wir kommen nun zur näheren Besprechung der ersten Periode:

I. Periode. Diese ist durch drei grosse Namen charakterisiert: Gauss, Lobatschefsky, Bolyai, denen ich hier gleich anreihen will: Beltrami der jedoch bereits einer späteren Zeit angehört. Lobatschefsky war ein Russe, Bolyai und zwar Wolfgang Bolyai und sein Sohn Johann sind Ungarn, genauer Siebenbürgen, Beltrami ist ein Italiener, so dass also bei unserem Berichte gleich anfangs der internationale Charakter unserer Wissenschaft hervortritt.

Gauss, dessen Namen wir an die Spitze stellen, hat selbst über seine Untersuchungen nur Andeutungen in Briefen gemacht, die später veröffentlicht sind. Was sich etwa in seinem Nachlass über diesen Gegenstand findet, ist bisher noch nicht publiciert. Wir entnehmen dem, was gedruckt vorliegt, das Folgende: Schon seit 1795 hat Gauss sich mit der Frage des Parallelenaxioms beschäftigt, und der Frage dabei gleich die charakteristische Wendung gegeben, dass er untersuchte, was geschieht, wenn das Parallelenaxiom als nicht gültig vorausgesetzt wird; er hat schon damals (als 18jähriger Jüngling) sich dementsprechend die Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie zurechtgelegt. Aber es ist auch keinem Zweifel unterworfen, dass er durch seinen Einfluss die Untersuchungen von Lobatschefsky und Bolyai angeregt hat. Denn nicht

sua sponte sind die neuen Ideen in dem Geiste jener Männer entstanden, sondern wenn auch zum Teil indirekt durch den persönlichen Zusammenhang mit Gauss.

Wir müssen daher Gauss unbedingt als den Schöpfer der nicht-euklidischen Geometrie bezeichnen.

Was von den hierher gehörigen Andeutungen von Gauss uns vorliegt, ist folgendes: (wir citieren nach der Reihenfolge der Publikation):

1. Sartorius von Waltershausen, 1856: „Gauss zum Gedächtnis." (gleich nach dem Tode von Gauss veröffentlicht.)

Sartorius von Waltershausen war Prof. der Mineralogie an der hiesigen Universität und verkehrte persönlich im Gauss'schen Hause. Er berichtet in der angeführten Schrift auf p. 81 von Äusserungen, die Gauss über nicht-euklidische Geometrie gelegentlich gemacht hat.

2.) Briefwechsel mit Schuhmacher, der 1860 und in den folgenden Jahren herauskam. [Schuhmacher, Astronom in Altona, ist der Begründer der Astron. Nachrichten.]. Es findet sich u.a. im Bd. 2 p. 268 ein Brief vom 12. Juli 1831, worin Gauss seine Ansicht über die hyperbolische Geometrie ausführlich auseinandersetzt und unter anderem folgende 3 Sätze angiebt:

a.) Es giebt in der hyperbolischen Geometrie Dreiecke, deren Winkel beliebig klein sind.

Wir erkennen hierin ein Theorem wieder, welches wir seiner Zeit bereits betrachtet haben.

b.) Es giebt in der nicht-euklidischen Geometrie keine Aehnlichkeit der Figuren, sondern nur Congruenz.

C.) Es wird ein Ausdruck für die Kreisperipherie vom Radius r für den Fall der nicht euklidischen Geometrie mitgetheilt. Derselbe lautet, wenn wir uns unserer bisherigen Bezeichnung bedienen:

$2\pi k\left(e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}}\right)$, wo k die charakteristische Konstante der Maassbestimmung ist. Auch dies können wir mit Hülfe unserer Formeln leicht ausrechnen, es ergiebt sich sehr einfach, wenn wir uns erinnern, daß die hyperbolische Maassbestimmung der Ebene mit derjenigen einer Kugel vom Radius $\frac{2k}{i}$ übereinstimmt.

Weiter wäre zu erwähnen im Bd. X pag. 246/47 ein Brief vom 28. Nov. 1846, in welchem sich Gauss sehr beifällig über die Untersuchungen von Lobatcheffsky äussert.

3.) In der schon erwähnten Festrede von Schering zur Centenarfeier 1877 finden wir angegeben einen Brief an Bessel vom Jahre 1829 und von allen Dingen einen Brief an Wolfgang Bolyai

vom Jahre 1799. Dies ist das interessanteste hierher gehörige Dokument, da es noch ganz aus Gauss' Jugendzeit stammt. In diesem letzterem Brief ist besonders gesagt, daß es in der hyperbolischen Geometrie ein Maximum des Dreieckinhaltes gebe. (vgl. pag. 395/96.).

Dies sind die sämmtlichen Notizen, die man in allgemeinen Kreisen über die Gauss'schen Untersuchungen, betreffend die nichteuklidische Geometrie besitzt. Gehen wir nun zu Lobatscheffsky und den beiden Bolyai über. Ersterer (geb. 22. Okt. 1793) war Professor in Kasan, während Wolfgang Bolyai (geb. 9. Februar 1775.) sowie sein Sohn Johann (geb. 15. November 1802) im ungarischen Orte Maros-Vásárhely lebten. Uns interessiren besonders die persönlichen Beziehungen der beiden Forscher Lobatscheffsky und Wolfgang Bolyai zu Gauss. Wolfgang Bolyai war, wie wir schon sagten, Universitäts-Freund von Gauss; Gauss selbst hielt sehr viel von ihm, er sagt von ihm daß er der einzige gewesen sei, der seine metaphysisch-mathematischen Fragen ganz zu verstehen vermocht hätte. (vgl. Sartorius v. Waltershausen, pag. 17.). Über Lobatscheffsky erfahren wir näheres aus der Biographie, welche seinen von der Universität Kasan herausgegebenen

Werken vorangestellt ist. Es zeigt sich, daß Lobatcheffsky ein Schüler von Bartels gewesen ist, der eine Zeit lang Professor in Kasan war und vorher mit Gauss in dessen Braunschweiger Zeit in engem mathematischen Verkehr gestanden hat. Von Bartels wurde Lobatcheffsky ganz ausführlich mit den Gauss'schen Schriften bekannt gemacht, und es kann kaum bezweifelt werden, daß er von diesem auch eingeweiht wurde in die Frage = stellung der Nicht = Euklidischen Geometrie (wegen Bartels vergl. S. v. Waltershausen pag. 13). Wenn somach auch kein Zweifel bestehen kann, daß Lobatcheffsky sowohl wie Bolyai die Fragestellung ihrer Untersuchungen der Gauss'schen Anregung verdanken, so muß man anderer = seits es durchaus anerkennen, daß die von ihnen gegebe = nen Ausführungen des Grundgedankens, die etwa seit dem Jahre 1830 erschienen, beiden eigenthümlich angehörten und vollauf selbstständige Arbeiten sind.

Betrachten wir jetzt näher die Schriften von Lobatcheffsky, die hier in Betracht kommen. Es sind dies zunächst eine Reihe von Abhandlungen in russischer Sprache aus den Jahren 1829 und 1830 in den Schriften der Universität Kasan. Dann folgt 1837 ein Aufsatz in Crelle's Journal Bd. 17 unter dem Titel: „Geometrie imaginaire." darauf erschien 1840 in Berlin ein kleines deutsches Schriftchen, ziemlich unansehnlich: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien."

Endlich hat Lobatcheffsky 1855 noch eine zusammenfassende, systematisch aufgebaute Bearbeitung seiner Untersuchungen veröffentlicht, gleichzeitig in russischer und französischer Sprache; dies ist die „Pangéometrie".

Alle diese Schriften sind jetzt in seinen gesammelten Werken, die 1883 und 1886 in Kasan in 2 Bänden erschienen sind, zugänglich, der 2te Band enthält die deutschen und französischen Publikationen.

Wir gehen über zu den Schriften der beiden Bolyai. Es ist hier besonders zu erwähnen die Schrift: W. Bolyai „Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae introducendi etc." Diese Arbeit erschien in 2 Bänden in den Jahren 1832-33. Sie giebt eine allgemeine Einleitung in das Studium der Mathematik in lateinischer Sprache. Diesem Werk ist nun als Anhang die Schrift des jüngeren Bolyai beigefügt:

J. Bolyai, „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc." Leider sind diese Werke im Buchhandel sehr selten geworden.*) dieselben sind von vorneherein nicht auf grosse Verbreitung berechnet gewesen, indem sie z.B. ohne Angabe ihres Verfassers erschienen sind. Wir müssen daher verweisen auf eine deutsche Bearbeitung des letzten Werkes:

Frischauf, „absolute Geometrie nach Johann Bolyai," welche zuerst 1872 in Leipzig erschien. Frischauf (Prof in Graz) hat im Jahre 1876 noch eine Schrift unter

*) Dasselbe gilt von der 1851 erschienenen deutschen Schrift: „Kurzer Grundriss eines Versuches etc." (Auszug aus dem Tentamen)

dem Titel „ die Elemente der absoluten Geometrie “ herausgegeben, die jedoch weniger zu empfehlen ist. Der Verfasser hat sich hier nämlich auch über neuere Untersuchungen verbreitet, deren Wiedergabe nicht correct sein dürfte.

Wenn wir einen Blick hineinwerfen, sei es in die Schriften von Lobatschefskky oder in die der Bolyai, so werden wir, wie es immer geht, wenn man Abhandlungen eines uns seither fremden mathemat. Schriftstellers zu lesen versucht, bald gewisse uns nicht sofort verständliche Abkürzungen und Bezeichnungen entdecken. Bei Lobatschefskky sei besonders erwähnt das Zeichen $\Pi(p)$, bei Bolyai z. B. Oy. Wir wollen, um das Verständnis zu erleichtern, die beiden Zeichen erklären. $\Pi(p)$ soll heißen „ Parallelwinkel.“ Es ist dies so zu

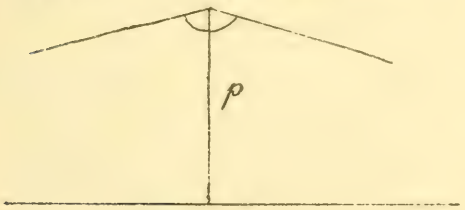


Fig. 42.

verstehen: Wenn man auf einer geraden Linie eine Senkrechte von der Länge p errichtet und von dem Endpunkte derselben aus die Parallelen (im hyperbolischen Sinne) zu der ersten Geraden zieht, so werden wir „ Parallelwinkel oder Winkel des Parallelismus “ die beiden Winkel nennen, welche die Parallelen mit der Senkrechten p bilden. Das Bolyaische Zeichen ist seiner Bedeutung nach ganz einfach; Oy soll nämlich

bezeichnen die Peripherie eines Kreises vom Radius y. – Im übrigen stimmen beide Autoren darin überein, daß sie in streng synthetischer Weise, nach dem Vorbilde Euklids, das System der hyperbolischen Geometrie aufbauten, und es ist wunderbar, wie diese Forscher, ohne irgend wie ein Abbild der neuen Anschauungsweisen zu haben, (wie uns dasselbe vorliegt, indem wir irgend einen reellen Kegelschnitt zeichnen), doch zum klaren Ende gekommen sind.

Wir wollen diesem Bericht über Gauss, Lobatcheffsky und Bolyai, wie wir schon in Aussicht stellten, gleich einige Worte über eine Schrift des Italieners Beltrami hinzufügen. Der Titel derselben ist:

„Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea."

(Versuch einer Interpretation der nicht-euklid. Geometrie).

Sie ist erschienen in der neapolitanischen Zeitschrift: Giornale di Matematiche 1868. Bd. VI.

Ehe wir jedoch von der Interpretation, die Beltrami für die Formeln der nicht-euklidischen Geometrie aufgestellt hat, berichten können, müssen wir uns in einem kleinen Excurs mit einigen Betrachtungen der allgemeinen Flächentheorie befassen.

Die moderne Theorie der krummen Flächen geht, (wenn wir nicht auf Euler zurückgreifen wollen), auf Monge zurück, dessen Schule um 1800 in Paris

blühte. Sein Hauptwerk führt den Titel:
„Application de l'Analyse à la Géometrie," es ist
zuerst unter diesem Titel 1807 erschienen. In dieser
Schrift wird vor allem die Frage nach der Abwickel-
barkeit einer Fläche auf die Ebene behandelt.
[„Developpable Flächen."] So kann etwa, um an die
einfachsten Beispiele abwickelbarer Flächen zu erinnern,
ein beliebiger Kegel, ein Cylinder auf eine Ebene abgerollt
werden. „Wenn wir dementsprechend auf einer „developpa-
blen Fläche" irgend ein Flächenstück besonders auszeichnen,
vielleicht auf ihm eine Figur entwerfen, so kann dieses
Flächenstück genau mit einem Stück der Ebene zur Deckung
gebracht werden, wobei dann die gezeichnete Figur mit
einer ihr kongruenten der Ebene zusammenfällt.
Umgekehrt kann man auch jede Figur der Ebene auf
die vorliegende abwickelbare Fläche übertragen.
„Wenn daher eine Fläche auf eine Ebene abgewickelt
werden kann, (natürlich ist hier nur von der gewöhn-
lichen euklidischen Ebene die Rede), so gilt auf der
Fläche die Euklidische Geometrie, wie in der Ebene,
nur daß statt von geraden Linien von kürzesten Linien,
„geodätischen Linien," als welche die ersteren sich über-
tragen, gesprochen werden muß."

Diesen Satz bedarf jedoch noch einer Einschränkung, wir haben bereits früher bemerkt, daß z. B. ein Rotationscylinder nicht einmal, sondern beliebig oft auf eine Ebene abgewickelt werden kann, ehe die ganze Ebene überdeckt ist. Wir können uns etwa die Ebene in einzelne Streifen zerfallen denken, deren jeder bereits dem ganzen Cylinder entspricht.

„Vollständig ist daher die in dem letzten Satze ausgesprochene Übereinstimmung nur, wenn wir kleinere einfach zusammenhängende Stücke der Fläche, bezw. der Ebene in Betracht ziehen, darüber hinaus können Verschiede im Zusammenhange der Flächen auftreten."

(nämlich daß der Rotationscylinder in sich zurückläuft, was die Ebene nicht thut, etc.—)

Jetzt liegt es nun außerordentlich nahe, nicht zu fragen, wann ist eine Fläche auf eine Ebene abwickelbar, sondern wann sind allgemein zwei Flächen auf einander abwickelbar. Offenbar müssen im Falle der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander die Entfernungen je zweier entsprechender Punkte sowie die Winkel, unter denen correspondierende Curven sich schneiden, gleich sein. Man wird leicht für diese notwendige und hinreichende Bedingung den analytischen

Ausdruck finden, wenn man zum Bogenelement übergeht. Denn der Bedingung wird, weil bei unendlich kleinen Dreiecken die Winkel durch die Seiten ohne weiteres bestimmt sind, dann und nur dann genügt werden, wenn die Längen entsprechender Linienelemente beider Flächen gleich sind. Nehmen wir nun auf der einen Fläche irgend welche krummlinige Coordinaten u, v an, so wird sich dasselbst $(ds)^2$ darstellen, wie wir bereits früher sahen, als:

$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, wo E, F, G gewisse Funktionen von u und v sind. Führen wir analog auf der anderen Fläche die krummlinigen Coordinaten u', v' ein, so wird entsprechend

$ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$ werden.

Nun ist die Frage: Wenn wir die Coordinaten u und v als Funktionen von u', v' denken, etwa $u = \varphi(u', v')$, $v = \psi(u', v')$, wird es uns dann gelingen, diese Funktionen so zu bestimmen, daß mit ihrer Hülfe der eine Differentialausdruck in den anderen übergeführt werden kann? Ist dies der Fall, so werden wir in der Gleichheit des Ausdruckes für das Quadrat der Länge des Linienelementes einen Beweis für die Abwickelbarkeit beider Flächen aufeinander erbracht haben. Ist es nicht der Fall, so ist die Abwickelung unmöglich.

Wir werden daher allgemein zwei Flächen auf

einander abwickelbar nennen, wenn es gelingt, den Ausdruck für ds^2 auf der einen Fläche durch Einführung geeigneter Variablen in den Ausdruck für ds^2 auf der anderen Fläche zu transformieren."

Das Problem der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander hat in dieser Weise Gauss in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1827 studiert. Es ist dies der im VI Bde der Göttinger Abhandlungen erschienene Aufsatz: „Disquisitiones generales circa superficies curvas."

In dieser Arbeit hat Gauss einen wunderbaren Satz aufgestellt, wunderbar zugleich wegen seiner Einfachheit und seiner Wichtigkeit. Um ihn verstehen zu können, müssen wir uns vorerst mit dem Begriff des „Krümmungsmasses" vertraut machen. Wenn man einen bestimmten Punkt einer krummen Fläche ins Auge fasst, so werden wir zwei Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche angeben können, in denen die Krümmung der Fläche ein Maximum und ein Minimum wird. Die so definierten Krümmungsradien R_1 und R_2 nennt man die „Euler'schen Krümmungsradien" und den reciproken Wert ihres Produktes $\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}$ bezeichnet man eben nach dem Vorgange von Gauss als das Krümmungsmass der Fläche in jenem bestimmten Punkte. Es entspricht dies durchaus dem, daß wir schon oben $\frac{1}{R^2}$ als Krümmungsmass einer Kugel vom Radius R bezeichneten.

Denken wir uns nun einmal, (um zu dem Gaussischen Satze überzugehen) als Beispiel einer Fläche die Äquatorzone *) einer Kug. d. Als Hauptkrümmungsradien wählen wir hier diejenigen, die sich auf die Fortschreitungsrichtungen der Meridiane und Breitenkreise beziehen. Wenn wir nun diese Zone aufgeschnitten denken längs des Bogens eines Meridians, so werden wir leicht im Stande sein, die Kugelzone, ohne ihren Charakter als Rotationsfläche zu ändern, bis zu einer gewissen Grenze auseinanderzubiegen, wir bemerken dann, daß der Krümmungsradius der Breitenkreise sich vergrößert, dagegen der Krümmungsradius der Meridiancurven kleiner wird. Das Umgekehrte findet natürlich statt, wenn wir die Kugelzone in sich selbst aufrollen, was in beliebigem Maasse geschehen kann. Dieses Beispiel der Biegung einer Fläche wird uns den angekündigten Gaussischen Satz illustrieren, der die Verhältnisse in exakter Form allgemein ausspricht:

„Wenn man eine Fläche beliebig deformiert, ohne ihr Bogenelement zu strecken, so bleibt dabei an jeder einzelnen Stelle das Krümmungsmaass constant."

Fig. 43.)

a) b) c)

*) Wir wählen der Einfachheit des Ausdrucks wegen die Bezeichnung der mathem. Geographie.

Aus letzterem Satze können wir sofort eine notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander herleiten:

„Damit 2 Flächen aufeinander abwickelbar sind, müssen sie an denselben Stellen je dasselbe Krümmungsmaass darbieten."

Soll daher z.B. eine Fläche auf eine Kugel vom Radius a abwickelbar sein, so muss sie überall das gleichförmige Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ besitzen. Doch es sagt der Gauss'sche Satz noch nicht, dass uns umgekehrt jede Fläche, welche die Eigenschaft hat, konstantes Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ zu besitzen, wirklich nun ein Bild der Kugel vom Radius a darstellt. Es war daher die Aufgabe der Weiterentwickelung dieser Theorie, hierüber Klarheit zu schaffen. Dies ist von Minding in Dorpat geschehen in den bezüglichen Abhandlungen in Crelle's Journal Bd 19 u. 20 von den Jahren 1839, 1840. Minding hat dort zum ersten Male die allgemeinen Flächen konstanten Krümmungsmaasses betrachtet, d.h. Flächen, die in ihren sämmtlichen Punkten dasselbe Krümmungsmaass besitzen. Und in der That beweist er den Satz:

„Wenn eine Fläche überall das konstante Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ hat, so kann sie durchweg auf die Kugel vom Radius a abgewickelt werden."

Insbesondere bestimmt dann aber Minding

Rotationsflächen dieser Eigenschaft. Wählen wir die Axe der Rotationsfläche als z-Axe und bezeichnen den senkrechten Abstand eines Punktes der Fläche von der Axe mit r, so ergiebt sich die Gl. der möglichen Meridiankurven in der Gestalt:

$$z = \int dr \sqrt{\frac{a^2(1-b^2)+r^2}{a^2b^2-r^2}}$$

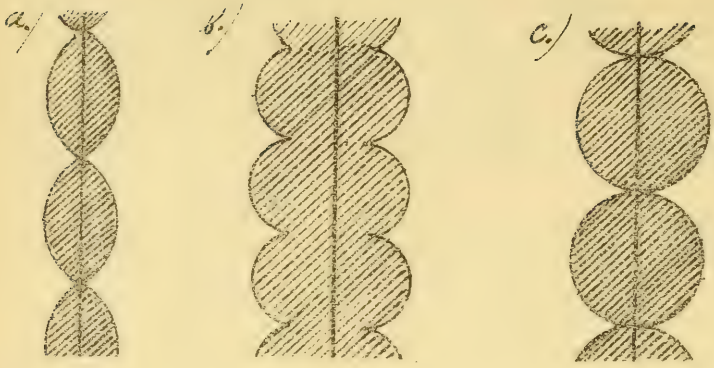
, wo b eine willkürliche Constante bezeichnet. *)

Je nach der Wahl der Constante b in der letzten Formel haben wir 3 verschiedene Formen der Meridian-kurven und damit der Rotationsflächen konstanten positiven Krümmungsmasses zu unterscheiden. Dieselben sind dargestellt in Fig. 44, a, b, c. Die erste Form zeigt uns eine Rotationsfläche, die aus an einander gereihten spindelförmigen Theilen besteht, die Meridian-kurve hat eine ähnliche Gestalt wie eine doppelte Sinus-linie. Die zweite Gattung der Flächen besteht aus über-einander gelagerten Wülsten, die in Rückkehrkanten zu-sammenstoßen. Den Übergangsfall zwischen diesen beiden Fällen bilden an einander gereihte Kugeln selber, die Meri-diankurve dieser dritten Art zeigt Reihen Halbkreise.

*) [NB. vergl. auch die Noten, welche hinsichtlich der von ihm veranstalteten Ausgabe von Monge's Applications (1850) zugefügt hat. (insbesondere pag. 583 ff. p. 599 f.), so wurden dort die Minding'schen Resultate aufs Neue abgeleitet.]

Fig. 44.

a/ b/ c/



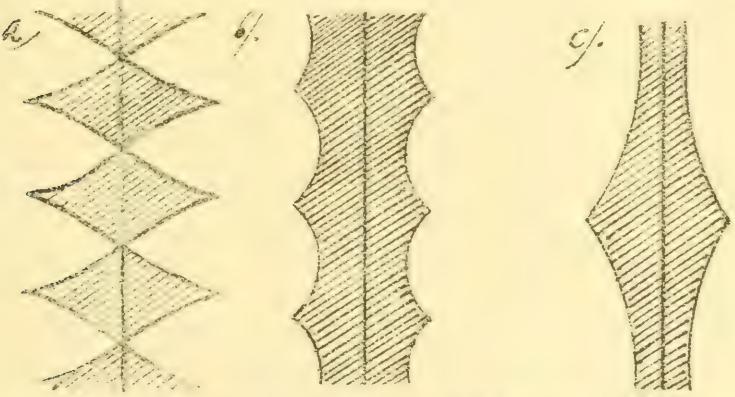
Man erhält die Rotations-flächen natürlich sehr einfach wenn man diese Curven um ihre Axe rotieren läßt.

Das Interesse, welches diese Rotationsflächen vermöge ihrer Eigenschaft, auf der Kugel abwickelbar zu sein, erwecken, möge aus folgendem Satze erhellen:

„Auf den so gewonnenen Flächen konstanter positiver Krümmung gilt dann bezüglich die sphärische Geometrie, indem man die größten Kreise der Kugel durch die geodätischen Linien der Oberfläche ersetzt denkt. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, daß man nur kleinere einfach zusammenhängende Stücke der beiden Flächen mit einander vergleicht, indem nämlich sonst andere metrische Zusammenhangsverhältnisse der Flächen in Betracht zu ziehen sind, auch ev. die Rückkehr der Curven einen weiteren Verfolg der geodätischen Linien in sich abschneiden."

Minding hat des ferneren nun auch Rotations-flächen konstanten negativen Krümmungsmaasses betrachtet; es ist nicht schwer auch solche Flächen sich vorzustellen. Wir wollen gleich die 3 hier in Betracht kommenden Typen anführen, sie seien durch ihre Meridiankurven in den Fig. 45 a, b, c dargestellt. Die erste Art der Flächen besteht wieder aus einer Reihe getrennter Segmente, die nur in einem Knotenpunkte zusammenhängen, jedes dieser Segmente besitzt außerdem in der Mitte eine Rückkehrkante. Die zweite Art der Flächen besitzt

Fig. 45.



etwa die Gestalt von auf einander gestellten Trommeln, je zwei auf einander folgende Glieder gehen vermittelst einer Rückkehrkante in einander über. Die dritte Art, welche die Übergangsform der beiden ersten darstellt, besteht nur aus einem einzelnen Abschnitte

der wieder eine Rückkehrkante besitzt und dessen beide Teile ins Unendliche sich erstrecken, indem sie sich der Axe asymptotisch nähern. Auf die weiteren Eigenschaften dieser Fläche werden wir in der nächsten Stunde näher eingehen.

Um die 3 Arten der Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung leichter bezeichnen zu können, wollen wir des Ferneren die Gestalt a den konischen Typus, die Gestalt b. den ringförmigen Typus, die Gestalt c. den asperisdischen Typus nennen. Was nun die analytische Formel für diese Flächen angeht, so erhalten wir dieselbe aus jener auf pag. 186 aufgestellten Formel für die Rotationsflächen konstanten positiven Krümmungsmaasses ganz einfach, indem wir das dort auftretende a^2 in $-a^2$ verwandeln. Es ist daher durch

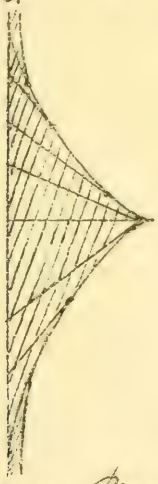
$$z = \int dr \sqrt{\frac{a^2(1-b^2) - r^2}{a^2 b^2 + r^2}}$$

die allgemeinste Gestalt der Meridiankurven unserer Fläche gegeben. Setzen wir in dieser Formel $b^2 < 0$, so erhalten wir speciell die Flächen des konischen Typus, setzen wir $b^2 > 0$, die des ringförmigen Typus, setzen wir $b^2 = 0$, den asperisdischen Typus. Im letzteren Falle können wir das Integral leicht auswerten. Dasselbe geht für $b^2 = 0$ über in $z = \int dr \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$, und wenn wir substituieren $r = a \cdot \sin \vartheta$, so bekommen wir, wie man sich leicht

überzeugt: $z = a\left(\log. tg. \frac{\varphi}{2} + \cos. \varphi\right)$. (Es ist die Integrationskonstante = 0 gesetzt, da für $r = a$, $z = 0$ angenommen ist.)

Wer mit der Geschichte der älteren Mathematiker bekannt ist, dem wird diese Gleichung bereits unter dem Namen der „Tractrix" entgegengetreten sein. Unter der „Tractrix" versteht man gemäß der von jenen Mathematikern aufgestellten Definition eine Curve, welche die Eigenschaft hat, daß die Abschnitte ihrer Tangenten zwischen den Berührungspunkten und einer festen Geraden konstante Länge haben.

Fig. 46.



Diese Curve giebt uns zugleich ein Beispiel, wie die älteren Mathematiker gern an Vorkommnisse des gewöhnlichen Lebens ihre Betrachtungen anzuknüpfen pflegten. Der Name „Tractrix" rührt nämlich daher, daß ein Hund, der etwa an einer Kette befestigt ist, eine solche Curve durchläuft, wenn das andere Ende der stets gespannten Kette vielleicht mittelst eines Ringes an einer Stange hingleiten gezwungen ist.

Wir können zusammenfassend sagen:

„Die Meridiancurve der aperiodischen Fläche konstanter negativer Krümmung ist einfach eine Tractrix."

Minding hat nun im Jahre 1839 nicht nur diese

Flächen konstanter negativer Krümmung bestimmt, sondern auch eine Bemerkung hinzugefügt, die uns nicht überraschen wird. Wenn wir die Geometrie auf diesen Flächen studieren, wenn wir im speciellen Dreiecke betrachten, die von geodätischen Linien gebildet werden, so sind, wie Minding gezeigt hat, die Formeln, welche den Zusammenhang der Winkel und Seiten solcher Dreiecke geben, leicht zu erhalten, indem man in die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie den Radius $i.a$ statt a einführt.

Wenn nun Minding im Bd. 19 des Crelle'schen Journals diese Bemerkung macht, und andererseits Lobatcheffsky seine Untersuchungen über die „Géometrie imaginaire" im Bd. 17 veröffentlicht, so sollte man meinen, daß es doch gar nicht lange hätte dauern können, bis der Zusammenhang der von beiden Forschern auf verschiedenem Wege gefundenen Resultate klar gestellt würde. Um so wunderbarer ist es, daß diese Abhandlungen sehr lange Zeit neben einander bestanden haben, ohne zu einander in Beziehung gesetzt zu sein. Erst Beltrami war es vorbehalten, im Jahre 1868 die Resultate von Minding und Lobatcheffsky mit einander zu verknüpfen. *)

---

*) Riemann hat freilich schon 1854 die Beziehung sehr wohl gekannt, vergl. weiter unten seine „Hypothesen". Vielleicht darf man annehmen, daß Gauss selbst die

Denn:

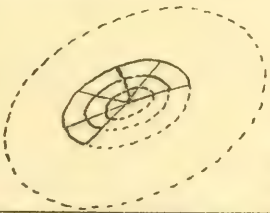
„ das Verdienst des Beltramischen Saggio ist es, nachdrücklich darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung sich geradezu mit der nichteuklidischen, d.h. hyperbolischen Geometrie deckt." Wir müssen jedoch noch hinzufügen: „ Abgesehen natürlich von den besonderen Zusammenhangs- und Begrenzungsverhältnissen, die bei solchen Flächen durch ihren Charakter als Rotationsflächen oder durch das Auftreten von Rückkehrkreuven herbeigeführt sein können."

Um diese Verhältnisse recht klar zu machen, ist es am zweckmäßigsten, daß wir uns geradezu in der Cayley'schen Ebene der hyperbolischen Maassbestimmung ein Abbild der betrachteten Flächen aufsuchen. Wir wollen beginnen mit dem konischen Typus unserer Flächen und ein Stück derselben ins Auge fassen, das von einer Rückkehrcurve sich nach einem Knotenpunkte hinzieht.

Fig. 47

a)

b)



Die Basiskreise werden sich dann offenbar in der

betr. Beziehung von vornherein im Auge hatte, als er 1827 seinen Satz vom Krümmungsmaasse aussprach. Aber Beltrami ist der Erste, der die Sache zur öffentlichen Discussion brachte.

hyperbolischen Ebene als concentrische Kreise erster Art darstellen müssen, da alle ihre Punkte jedesmal von einem erreichbaren Punkte, nämlich dem Knotenpunkte der Fläche, gleich weit entfernt sind, die Meridiane dagegen werden als orthogonale Trajectorien der Breitenkreise in die geradlinigen Strahlen übergehen, die vom Mittelpunkte der Kreise in der hyperbolischen Ebene ausgehen; in der That laufen die Meridiane ja auch alle in dem Knotenpunkte zusammen. Damit der besondere Zusammenhang, den die Fläche a) als Rotationsfläche bedingt, aufgehoben wird, denken wir uns dieselbe längs eines Halbmeridians aufgeschnitten. Die Darstellung in der Cayley'schen Ebene wird dann der Art sein, daß das Bild der zerschnittenen Fläche ein Ausschnitt aus einem Kreise erster Art, nämlich aus einem Kreise mit wirklichem Mittelpunkt ist. Es kann nun nicht schwer werden, nachdem das System der Breitenkreise und Meridiane übertragen ist, jede Figur auf der Fläche a) durch die entsprechende Figur in der hyperbolischen Ebene abzubilden, oder umgekehrt jede Figur der letzteren auf die erstere zu übertragen.

Analog verfahren wir bei der Abbildung der ringförmigen Flächen; auch hier werden wir nur das einzelne Stück betrachten, das jetzt von zwei Rückkehrkurven begrenzt ist. Nehmen wir darauf

Rücksicht, daß die Meridiane in diesem Falle nicht in einem Punkte zusammenlaufen, wohl aber die Breitenkreise rechtwinklig schneiden, so können wir sofort sagen:

„Die Meridiane verwandeln sich in der Cayley'schen Ebene in Stücke von geraden Linien, die in einem idealen Centrum zusammenlaufen, die Breitenkreise geben Stücke zugehöriger concentrischer Kreise dritter Art, insbesondere der Kehlkreis, d. h. der Kreis kleinster Ausdehnung, zieht ein Stück der die Figur durchziehenden Berührungssehne."

Wir müßen jedoch noch ein Wort über die Begrenzung des Bildes hinzufügen. Um den Zusammenhang der Rotationsfläche aufzuheben, denken wir uns den Ring wieder längs eines Meridians aufgeschnitten, die so entstehenden Ränder entsprechen den Stücken beider Randstrahlen des Bereiches in der hyperbolischen Ebene, während die Rückkehrkanten der Fig. a.) durch Stücke des correspondierenden Kreises am O dargestellt werden. Wir haben dieselben in der Figur stärker ausgezogen w. Fig. 4?

Was wird nun aus dem Meridian vom sphärischen Typus bei ihrer Abbildung auf die Cayley'sche Ebene?

Wir denken diese Fläche wieder längs eines Meridians aufgeschnitten und dann auseinander gefaltet

Wir erkennen leicht, die Meridiankreise werden gerade Linien werden, die in einem unendlich fernen Punkt O zusammenlaufen, die Breitenkreise dagegen werden als orthogonale Trajektorien der Meridiane den Horocyclen um O als Mittelpunkt entsprechen.

Fig. 48.

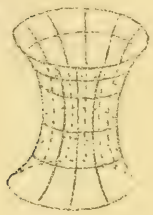
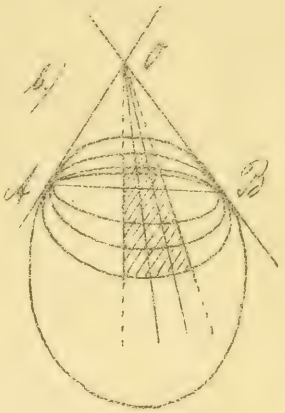
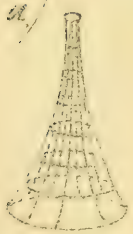


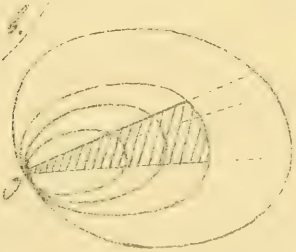
Fig. 49.



Es wird dann ein Kreisausschnitt, wie Fig. 49 zeigt, sein, der bei der Abbildung der Fläche vom aperiodischen Typus entsteht.

Hiernach repräsentiert also jede einzelne geschlossene Rotationsfläche konstanter negativer Krümmung nur einen kleinen Theil der Cayley'schen Ebene, indem die konische Fläche einem



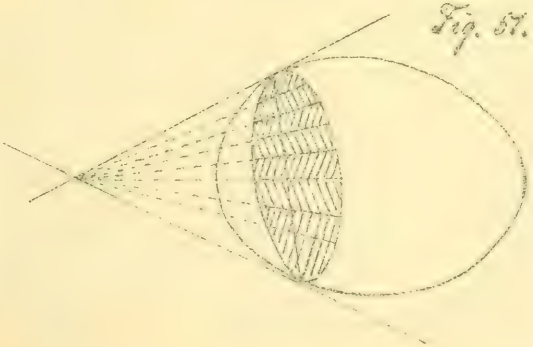


Kreisausschnitt ersten Art, die ringförmige einem solchen zweiter Art, die aperiodische einem solchen zweiter Art entspricht. Besser kann man die Abbildung jedoch wahrnehmen, indem man nicht die Rotationsfläche längs eines Meridians aufgeschnitten denkt, sondern indem man sie einfach auf die

hyperbolische Ebene abwickelt, sooft, bis der ganze Kreis bedeckt ist. Wir können uns etwa die Fläche wiederholt mit einem Papierstreifen umwickelt denken, der dann abgerollt wird. Im Falle des conischen Typus entsteht dabei vorkommenden Falles eine mehrfache Bedeckung der in der Bayley'schen Ebene gelegenen Kreisfläche, wir wollen darum vom conischen Typus hier nicht weiter reden. Im Falle des ringförmigen und periodischen Typus haben wir die Rotationsfläche unendlich oft abzuwickeln, ehe die ganze Kreisfläche bedeckt ist. Von einer mehrfachen Bedeckung der letzteren ist keine Rede. Auf dem Papierstreifen, mit dem wir uns unsere Flächenmodelle unendlich oft umwickelt denken, findet dann das ganze Innere eines Kreises einer, zweiten oder dritten Art seine Abbildung. Man kann diese Art der Umwickelung zweckmäßig vergleichen mit der eines Rotationscylinders auf der gewöhnlichen Ebene, am Beispiel dessen wir uns bereits öfter bedient haben. (s. Fig. 56 und 57.)

Fig. 56.

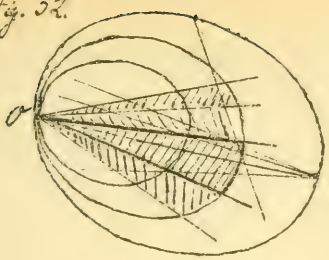
Fig. 57.



Es handelt sich nun insbesondere darum, irgend welche Figuren, die auf den Flächen gegeben sind, auf die Cayley'sche Ebene zu übertragen, und umgekehrt. Wir können uns in diese Verhältnisse leicht genauer hineindenken, wenn wir auf den Rotationsflächen die geodätischen Linien betrachten. Dieselben müssen sich bei der Abwickelung aus den geraden Linien der Cayley'schen Ebene ergeben. Ziehen wir z. B. im Falle der aperiodischen Fläche (Fig. 52.) eine gerade Linie, die von einem Punkte des in Fig. gezeichneten begrenzenden Horocyclus zu einem anderen geht und dabei eine beliebige Anzahl der auf einander folgenden Kreissektoren schneiden möge. Entsprechend wird die correspondierende geodätische Linie auf der Fläche von einem Punkte der Rückkehrkante ausgehend die Fläche einmal, zweimal, dreimal u. s. w. umwinden, je nachdem die gerade Linie einen, zwei, drei u. s. w. Sektoren durchschneidet, sie wird dabei einen höchsten Punkt erreichen, der dem Berührungspunkte der Geraden in der Ebene mit einem leicht construierbaren Horocyclus entspricht, und wird schließlich in einem zweiten Punkte der Rückkehrkurve enden. Der aufsteigende und der absteigende Teil der geodätischen Linie liegen zueinander symmetrisch in Bezug auf einen Meridianschnitt.

Wenn wir einmal einen einzelnen Meridian in der hyperbolischen Ebene ins Auge fassen, so sehen wir,

Fig. 52.

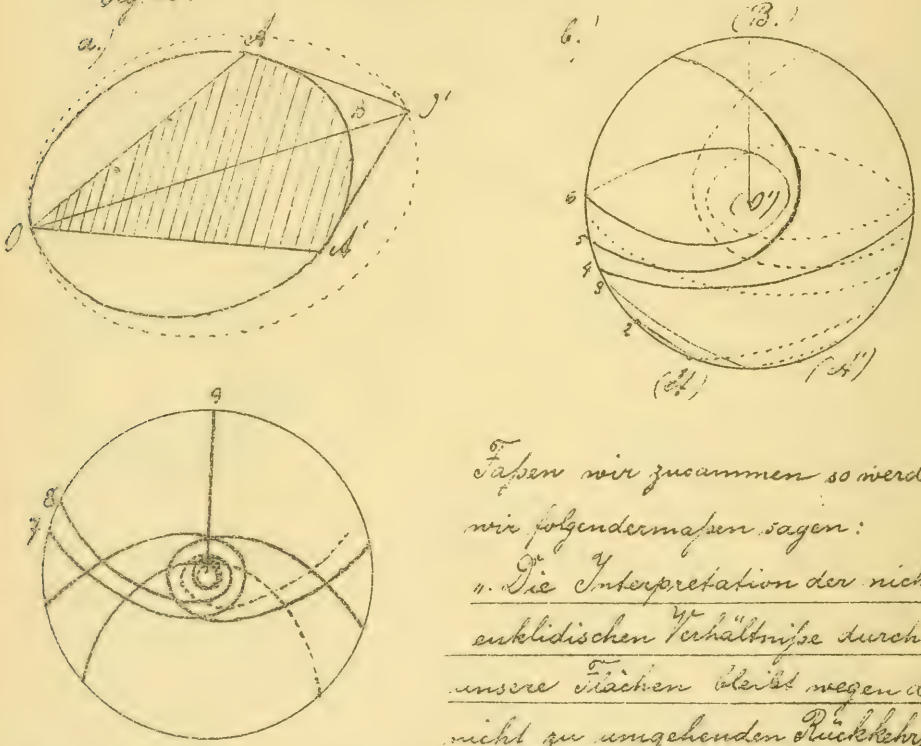


dass ausser der Gesammtheit der übrigen Meridiane, die alle zu ihm parallel sind, noch eine zweite Schaar von geraden Linien existiert, die gleichfalls dem bevorzugten Meridian parallel ist; es sind dies die geraden Linien, welche durch den zweiten Schnittpunkt des Meridians mit dem Kegelschnitt gehen. (Wir können diese zweite Schaar etwa „antiparallele Gerade" nennen). Es ist nun eine gute Uebung, sich in den Verlauf der diesen antiparallelen Geraden entsprechenden geodätischen Linien auf der Fläche hineinzudenken.

Es sei z. B. in Fig. 53a der schraffierte Theil der Cayley'schen Ebene die Abbildung einer gegebenen asperiodischen Rotationsfläche, in dieser sei ein Meridian ausgezeichnet. Wir wollen die zu ihm „antiparallelen Linien" betrachten und auf die Fläche als geodätische Linien übertragen, indem wir ausgehen von den Tangenten an den begrenzenden Horocyclus und diese Strahlen sich um O drehen lassen, nach dem bevorzugten Meridian zu. Die entsprechenden geodätischen Linien werden die Fläche unendlich oft überdecken, da die Endpunkte derselben die Rückkehrkurve unendlich viele Male umlaufen werden, während der Anfangspunkt der geodätischen Linien von A bis B läuft.

von A' bis B wandert. In Bezug auf den ausgezeichneten Meridian werden je zwei geodätische Linien symmetrisch liegen. Es sind diese Verhältnisse in einer orthographischen Projection der Fläche auf die Ebene der Rückkehrkante dargestellt in den Fig. 53, b, c.*)

Fig. 53.



Fassen wir zusammen so werden wir folgendermaßen sagen:

„Die Interpretation der nichteuklidischen Verhältnisse durch unsere Flächen bleibt wegen der nicht zu umgehenden Rückkehrkurven

*) Wir wollen übrigens bemerken, daß wir bei dieser Betrachtung nur einen hypothetischen Fall angenommen haben, es könnten ebensowohl die Punkte A und A' auch im zweiten oder dritten u.s.w. Kreisausschnitt liegen, wodurch eine kleine Modification des Gesagten nötig wird.

noch immer eine unvollkommene. So ist es z. B. unmöglich ein Dreieck, dessen 3 Winkel gleich 0 sind, auf eine Fläche konstanter negativer Krümmung zu übertragen. Am überzeugendsten ist die Uebereinstimmung der Flächen mit der hyperbolischen Ebene, wenn man kleine an die Fläche angeschmiegte Figuren betrachtet. Dieselben kann man ganz beliebig auf derselben verschieben und bewegen, so lange man nicht an die Rückkehrcurve stößt, ohne daß die Figuren aufhören, sich der Fläche vollständig anzuschmiegen. Man erkennt hiernach leicht, daß auch auf den Flächen konstanten negativen Krümmungmaasses genau wie in der hyperbolischen Ebene dreifach unendlich viele Bewegungen möglich sind.

Wenn wir nun einmal die Figuren betrachten, die Beltrami seiner Abhandlung beigegeben hat, so werden wir eine auffallende Uebereinstimmung finden mit der Art der Figuren, die wir bei unserer Betrachtung benutzten. In der That hat Beltrami genau diese Art der ebenen Abbildung unserer Flächen, wie wir sie benutzen. Man sollte daher meinen, daß Beltrami die Cayley'sche Maassbestimmung, die ja bereits im Jahre 1859 veröffentlicht wurde, gekannt habe. Dem ist jedoch nicht so. Bereits 1865 ist vielmehr von Beltrami in den

Annali di Matematiche ser. I. Bd V. in einer eigenen Untersuchung gezeigt worden, daß die Flächen konstanter negativer Krümmung so auf eine Ebene abgebildet werden können, daß den geodätischen Linien gerade Linien der Ebene entsprechen. Auf Grund dieser früheren Arbeit benutzt dann Beltrami in seinem Saggio in der That die Abbildung auf die Cayley'sche Ebene, ohne darum die Cayley'sche Theorie als solche zu erkennen. Hiermit hängt ein wesentlicher Unterschied zwischen Beltrami's Auffassung und meiner eigenen zusammen.

„Entsprechend dem Umstande, daß ihm die Cayley'sche Maassbestimmung nicht bekannt war, lag Beltrami überhaupt die Auffassung fern, mit der projectiven Geometrie zu beginnen und auf sie gestützt erst den Unterschied der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie zu entwickeln. Für ihn ist die Abbildung auf die Cayley'sche Ebene nur ein Hülfsmittel, um die anderweitig gewonnenen nichteuklidischen Formeln zu versinnlichen. Sie ist ihm aber nicht die wahre Grundlage der nichteuklidischen Fragestellung selbst."

Es ist vielleicht von Interesse, eine vollständige

Zusammenstellung der neueren Litteratur über die Theorie der Flächen konstanter negativer Krümmung zu haben. Wir wollen dieselbe im Folgenden geben.

Wir haben bisher nur Rotationsflächen constanter Krümmung betrachtet, auf man Mittel auch allgemeinere Flächen constanter Krümmung zu bestimmen, vielleicht die allgemeinsten Flächen? Diese Frage ist in ihrem vollen Umfange bisher noch nicht beantwortet, man hat jedoch einige besondere Specialfälle untersucht, die von Interesse sind. Wir haben hierüber Folgendes anzuführen:

1.) Dini, Comptes rendus I. 1865. In dieser Abhandlung hat Dini alle Schraubenflächen konstanter negativer Krümmung behandelt. Unter diesen befindet sich auch eine, deren Meridiankurve die Tractrix darstellt. Wir haben uns also diese Curve, auf der sie nur einfach um ihre Axe rotieren zu lassen, zugleich gleichmäßig längs der Axe fortbewegt zu denken, um die betreffende Schraubenfläche zu erhalten (Modell).

2.) Enneper, 1868. Göttinger Nachrichten. Enneper fragte sich, gibt es Flächen konstanter Krümmung, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien ebene Curven darstellt? Er fand dies in der That bestätigt, er hat dann solche Flächen genauer untersucht und gezeigt, daß die Ebenen der einen Schaar der Krümmungslinien sämmtlich durch eine feste

Axe gehen, während die andere Schaar der Krümmungslinien aus sphärischen Schnitten besteht, die Kugeln angehören, deren Mittelpunkte auf eben jener Axe liegen. An diese Arbeit von Enneper schließen sich 2 Göttinger Dissertationen an, in welchen je ein Typus der Enneperschen Flächen näher betrachtet wird. Es sind dies:

3.) Bockwoldt, Diss. 1878.

4.) Lenz, Diss. 1879.

Ersterer behandelt eine Fläche konstanter positiver Krümmung, letzterer eine Fläche konstanter negativer Krümmung. (Die von diesen Herren angefertigten Modelle sind noch hier in der Sammlung mathem. Instrumente u. Modelle vorhanden.)

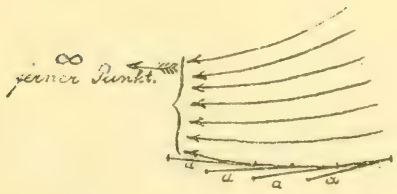
Weiter haben wir zu nennen:

5.) den Italiener Bianchi, der in seiner Dissertation 1879 (Pisa) ein merkwürdiges Theorem über Flächen konstanter negativer Krümmung aufstellte, das er dann später in den Mathem. Annalen Bd. 16. weiter ausgeführt hat. Dieses Theorem wollen wir kennen lernen, es ist in Kürze folgendes:

„Kennt man eine Fläche konstanter negativer Krümmung mit dem Krümmungsmaaß $-a^2$ und auf ihr eine Schaar paralleler geodätischer Linien

d.h. solcher Linien, denen in der Cayley'schen hyperbolischen Ebene Strahlen entsprechen, die von einem Punkte des fundamentalen Kegelschnittes auslaufen,) so kann man eine neue Fläche derselben konstanten negativen Krümmung ableiten, indem man auf die geradlinigen Tangenten jener geodätischen Linien vom Berührungspunkte ab das Stück a in Richtung des unendlich fernen Punktes aufträgt. Die Endpunkte dieser abgetragenen Strecken bilden dann die neue Fläche im Raume. Um ein Beispiel dieser Erzeugungsweise neuer Flächen zu haben, gehe man etwa aus von der Rotationsfläche des ringförmigen Typus.

Fig. 54.

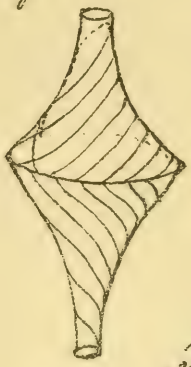


Wir wollen dann als Schaar paralleler geodätischer Linien die eine Schaar der zu einem beliebigen Meridian „parallelen Linien" ins Auge fassen. Fig. 55. [Solcher parallelen Linien werden zwei Schaaren auftreten, da ja jede einem Meridian entsprechende Gerade der Cayley'schen Ebene zwei unendlich ferne Punkte besitzt.].

Führen wir dann bei diesen geodätischen Linien die angeführte Konstruktion aus, so entsteht die Lenzsche Fläche." Wenn wir die analoge Bianchische Konstruktion bei einer Schaar antiparalleler geodätischer Linien der Rotationsfläche von aperiodischem Typus ausführen (v. Fig. 56.), so entsteht das „Gypsmodell von Kuen" (1881.) Die Modelle beider Flächen befinden sich in der Sammlung. (Vgl. übrigens die Erläuterungen zu diesen Modellen in dem Katalog mathem. Modelle der Verlagshandlung L. Brill in Darmstadt.)

Fig. 55

Fig. 56.



Nun sind ferner noch die merkwürdigen Arbeiten von Lie und Bäcklund zu erwähnen:

7.) Lie, Nouv. Archiv für Mathematik, 1879-80. Bd. 4-5.

7.) Bäcklund, Mathem. Annalen, Bd. 19. (1882), pag. 418-422.

Beide Forscher verallgemeinern in diesen Arbeiten die Bianchische Konstruktion.

Endlich haben wir noch einer zusammenfassenden Darstellung zu gedenken, die wieder Bianchi gegeben hat:

8.) Bianchi 1886. „Lezioni di Geometria differenziale."

Es ist dies eine autographierte Ausgabe der Vorlesungen, die Bianchi in Pisa gelesen hat. Er entwickelt dort insbesondere die Lieschen und Bäcklundschen Theoreme von seinem Standpunkte aus.

Dies wäre wohl alles was wir über die Litteratur der Flächen negativer Krümmung mitzuteilen hätten.

Zugleich sei hiermit unsere Betrachtung der ersten Periode in der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie abgeschlossen, jener Periode, die charakterisiert war durch die Namen:

Gauss, Lobatcheffsky, Bolyai.

Wir gehen jetzt zur zweiten Periode über, die ihre hauptsächliche Vertretung findet in den Arbeiten von Riemann und Helmholtz.

Ehe wir die hierher gehörigen Schriften dieser Männer, sowie die sich an dieselben anschließenden Arbeiten anderer Mathematiker näher besprechen, wollen wir vorerst kurz die Betrachtungsweisen dieser zweiten Periode, die übrigens im Einzelnen sehr verschiedenartig sind, allgemein charakterisieren. Lobatcheffsky und Bolyai knüpften ihre Untersuchungen an geometrische Figuren an, ganz in der Weise Euklids.

Riemann und Helmholtz dagegen gehen analytisch vor. Sie legen ihren Betrachtungen gleich n unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ zu Grunde.

entwickeln ganz allgemein dementsprechende Formeln und betrachten die Verhältnisse, wie sie die wirkliche Geometrie angehen, nur als specielle Anwendungen ihrer Untersuchung für den Fall $n = 3$.

Gehen wir nun zu Riemann über.

Die zu erwähnende Arbeit von Riemann ist sein berühmter Habilitationsvortrag aus dem Jahre 1854: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen." Dieser Vortrag war nicht zur Publikation bestimmt, er ist erst 1868 aus dem Nachlasse Riemanns herausgegeben von Dedekind in Braunschweig, im Bd. 13 der Göttinger Abhandlungen. Seitdem ist jedoch diese Schrift vielfach wieder gedruckt, sie findet sich insbesondere auch in den gesammelten Werken von Riemann pag. 254 bis 269 (vergl. auch Bemerkungen Dedekinds hierzu pag. 511 der gesammelten Werke). Obwohl die Arbeit nicht umfangreich ist, ist sie doch von grundlegender Bedeutung geworden. Man kann wohl behaupten, daß jeder Mathematiker, der die moderne Entwickelung unserer Wissenschaft verstehen will, diese Schrift eingehend studiert haben muß. Wir wollen versuchen, von dem Inhalte der Arbeit, soweit uns derselbe hier angeht, eine kurze Skizze zu geben.

Im dem Hauptheile des Vortrages hebt Riemann

an der analytischen Betrachtung fest. Er legt seinen Untersuchungen demnach nicht den Raum zu Grunde, sondern das, was wir, eben gemäß dieses Vortrages, eine „Mannigfaltigkeit" von n Dimensionen nennen. Das Einzelwesen, das Individuum dieser Mannigfaltigkeit soll durch das einzelne Werthsystem von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmt sein. Man sagt wohl auch man hat einen „Raum" von n Dimensionen, in dem ein jeder „Punkt" durch n Coordinaten festgelegt ist. Doch vermeidet Riemann diese Ausdrucksweise, eben deswegen, weil er unseren eigentlichen Raum weiterhin als Specialfall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit einführen will, das Wort „Raum" also für ihn von vornherein eine ganz concrete Bedeutung hat.

Nun wollen wir uns einmal denken, es sei in dieser Mannigfaltigkeit von n Dimensionen das Quadrat der Länge des Linienelementes für jedes Werthsystem der n Variabeln in analytischer Form gegeben durch:

$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, wo die a_{ik} irgend welche Funktionen der x sind. Es ist uns dies bei einer Mannigfaltigkeit von 2 Dimensionen [illegible] bekannt. Denn haben wir uns zwei Variabeln x_1, x_2, so können wir uns stets eine Hilfsfläche im gewöhnlichen Raum konstruiert [illegible]

diese y_k Variabeln als Coordinaten deuten. Der Ausdruck für ds^2 giebt uns dann einfach das Quadrat des gewöhnlich zu betrachtenden Bogenelementes, für jede beliebige Stelle der Fläche um Welten wie einmal bei dieser Versinnlichung für $n=2$ durch eine Hülfsfläche sehen. Wir wissen, wie ausserordentlich wichtig für jede Stelle dieser Fläche der Begriff des Krümmungsmaasses $\frac{1}{R_1 R_2}$ ist. Wir haben auch bereits gesehen, dass dieses Krümmungsmaass seinen Wert nicht ändert, welche Hülfsfläche wir auch auswählen mögen, d. h. welchen Biegungen oder Abwickelungen wir die einmal gewählte Hülfsfläche auch unterwerfen mögen. Es liegt dies eben daran, dass $\frac{1}{R_1 R_2}$ einzig und allein von der inneren Natur des Bogenelementes abhängt, die in dem Auftreten der Funktionen a_{ik} begründet liegt.

Wir wollen dies noch genauer präcisieren. In dem Falle zweier Variabeln werden wir in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{13} haben. Es sind dies dieselben Grössen, die wir früher mit E, F, G bezeichneten. Es ist nun Krümmungsmaass für jeden Punkt auf der Fläche gegeben durch:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = F\left(a_{ik}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_1 \partial x_2}\right),$$

d. h. in Worten:

„Wir haben uns das Krümmungsmaass zu denken als eine bestimmte Funktion der a_{ik} und ihren nach den x genommenen ersten und zweiten Differentialquotienten, welche die Eigenschaft hat, nur von der Fläche abzuhängen, also unverändert denselben Wert zu behalten, wenn sich statt x_1, x_2 irgend welche andere krummlinige Bordinaten auf der Hülfsfläche einführen."

In der That hat bereits Gauss einen solchen Ausdruck für $\frac{1}{R_1 R_2}$ gefunden und eben daraus geschlossen, (wie wir hier nachträglich bemerken) daß das Krümmungsmaass unveränderlich dasselbe ist für alle Flächen, deren Bogenelement durch die gleiche Formel $\sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$ sich [illegible] wir die genaue Formel für das Krümmungsmaass hier nicht mittheilen, der Grund ist einfach der, weil dieselbe zu lang ist, wenn wir nicht Abkürzungen einführen wollen, die selbst eine eingehende Betrachtung erfordern würden.

Wir wollen uns nun fragen, ob wir ähnliche Betrachtungen auch in einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen anstellen können. Können wir vor allem auch hier ein Krümmungsmaass bestimmen?

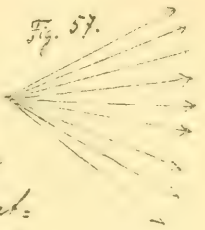
Riemann verfährt bei der Beantwortung dieser Frage so: Er denkt sich vor allen Dingen in seiner n-fach

ausgedehnten Mannigfaltigkeit die geodätischen Linien, die kürzesten Linien, berechnet und konstruiert. Diese kürzesten Linien sind solche Linien, deren Bogenlänge eine verschwindende Variation hat. Wenn wir daher die Variation des Integrals $\int ds$, welches in bestimmten Grenzen genommen uns die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ergiebt, gleich 0 setzen, so liefert uns die Gl. $\delta \int ds = 0$ das System der Differentialgleichungen der geodätischen Linien. Von jedem Punkte der n-fachen Mannigfaltigkeit strahlen nach allen Richtungen solche geodätische Linien aus, und zwar giebt es von jedem Punkte aus ∞^{n-1} solcher Linien. Denn man kann jeden Punkt mit jedem beliebigen anderen der n-fach unendlichen Mannigfaltigkeit der Punkte durch eine geodätische Linie, welche der betrachteten Mannigfaltigkeit angehört, verbinden, da aber auf jeder solchen Linie selbst wieder eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten liegt, so erhellt leicht der ausgesprochene Satz, daß von jedem Punkte ∞^{n-1} geodätische Linien ausstrahlen.

Nun sagt Riemann, wir wollen einmal ein einzelnes Büschel solcher geodätischen Linien betrachten. Wir haben dies so zu verstehen: Wir denken uns zwei beliebige von einem Punkte ausstrahlende geodätische Linien ausgewählt und lassen alle die geodätischen Linien [illegible]

anfängliche Fortschreitungsrichtungen in derselben linearen Mannigfaltigkeit liegen mit den Fortschreitungsrichtungen der bevorzugten beiden Linien. [Eine geodätische Linie ist nämlich durch einen ihrer Punkte und die Fortschreitungsrichtung in derselben vollständig bestimmt.]

Fig. 57.



{ Genauer: sind dx'_i und dx''_i die Anfangsdifferentiale zweier geodätischen Linien, so nimmt Riemann die Gesammtheit der geodätischen Linien in Betracht, für die $dx_i = \lambda' dx'_i + \lambda'' dx''_i$ }.

Riemann findet nun für jedes von einem Punkte auslaufende Büschel von Fortschreitungsrichtungen ein Krümmungsmaass, indem er diese Fortschreitungsrichtungen als die Anfänge der geodätischen Linien betrachtet, sich so eine zweifach ausgedehnte von einfach ∞ vielen geodätischen Linien überdeckte Mannigfaltigkeit erzeugt und deren Krümmungsmaass im Gaussischen Sinne betrachtet.

Wir wollen nun gleich sehen, wie Riemann eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung definiert. Da einmal von einem Punkte ∞ viele Büschel auslaufen, andererseits wir auch den Punkt selbst beliebig in der Mannigfaltigkeit wählen können, so werden wir sagen:

„Unsere Mannigfaltigkeit heisst insbesondere von konstantem Krümmungsmaasse, wenn das gesamte zunächst von der Wahl des Punktes und des von diesem auslaufenden Büschels abhängige Krümmungsmaass ungeändert bleibt, sobald ich den Büschel beliebig um den Punkt drehe oder den Punkt innerhalb der Mannigfaltigkeit beliebig wandern lasse."

Dieser Begriff einer „n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung" ist das wesentlichste Ergebnis der Riemann-schen Betrachtung. Wir werden nun des Ferneren näher zu betrachten haben, welche Eigenschaften Riemann bei solchen n-fachen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zu finden weiss.

Riemann bemerkt zunächst nur ohne Beweis, dass man bei den n fachen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung den auf pag. 237 angeführten Ausdruck $ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ auf eine einfache Form bringen kann. Wenn wir das konstante Krümmungsmass mit $+\frac{1}{a^2}$ resp. $-\frac{1}{a^2}$ bezeichnen, so sagt er, kann man das Linienelement darstellen durch die Formel:

$$ds^2 = \frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots\dots + dx_n^2}}{1 \pm \frac{1}{4a^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \dots\dots + x_n^2\right)}.$$

Diese Form für ds^2 nennen wir des Ferneren die Riemannsche Normalform des Bogenelementes. Wenn wir nun

insbesondere annehmen, daß das Krümmungsmaass gleich 0 wird, so reduciert sich ds^2 auf die noch einfachere Gestalt:

$$ds^2 = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots\cdots + dx_n^2}\,,$$

die wir aus der gewöhnlichen analytischen Geometrie für $n=2$ u. $n=3$ kennen. Es stellt also die Riemannsche Formel für $n=2$ und $n=3$ das Bogenelement der Euklidischen Geometrie dar.

Riemann hat nun für den Fall, daß $\frac{1}{a^2} = 0$ wird, noch eine andere Bezeichnung eingeführt die jedoch nicht zu empfehlen ist. Es ist dies übrigens das Einzige, was wir in dem Riemannschen Vortrage nicht billigen möchten. Riemann irrt sich nämlich darauf, daß man für $n=3$ im gewöhnlichen (Euklidischen) Raum Flächen konstanten Krümmungsmaasses deuten kann, die die allgemeine Betrachtung einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit constanter Krümmung illustrieren.*)

Ebenso findet für $n=2$ bei verschwindendem Krümmungsmaaß die allgemeine Betrachtung eine Deutung in der gewöhnlichen Euklidischen Ebene. Deswegen nennt Riemann die Mannigfaltigkeiten constanter, aber verschwindender Krümmungs ebene Mannigfaltigkeiten. Wir müssen jedoch sagen:

„Wenn schon die Bezeichnung Mannigfaltigkeit

*) und damit anticipiert er Beltrami's Saggio.

von konstantem Krümmungsmaass einen Missverständniss Raum giebt, als läge nämlich eine solche Mannigfaltigkeit nothwendig gekrümmt in einem höheren Raum, so ist die Benennung „ebene" Mannigfaltigkeit noch störender. Denn dieselbe scheint auszuschliessen, dass man in der Ebene andere Bogenelemente als das Euklidische Bogenelement selbe interpretieren können, während wir doch gerade in einem grossen Teil unserer Vorlesung in der Ebene eine elliptische und hyperbolische Massgeometrie zum Gegenstand unserer Betrachtung gemacht haben und dementsprechend ein nicht-euklidisches Bogenelement definiert haben. Die Ebene der Nicht-Euklidischen Geometrie wäre also nicht „eben"

Jedoch dies sei nur beiläufig bemerkt. Riemann zeigt nun, dass eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung genau so in sich bewegt werden kann, wie wir es im speciellen bei den Flächen konstanter Krümmung und bei der gewöhnlichen Ebene und dem gewöhnlichen Raum kennen. Doch fragen wir uns genauer, wie gross ist dementsprechend die Beweglichkeit der n fachen Mannigfaltigkeit?

In der Ebene giebt es, wie wir bereits sahen ∞^3 Bewegungen. Wir können uns dies leicht folgendermassen klar machen. Wir betrachten in der Ebene 2 Punkte, die den festen Abstand $r_{1,2}$ haben mögen.

Wir können dann die Ebene beliebig so in sich verschieben, daß diese 2 Punkte mit 2 anderen irgendwie gegebenen zusammenfallen, die denselben Abstand haben. Fallen unsere beiden Punkte aber einmal mit festgegebenen zwei Punkten zusammen, so ist damit die ganze Ebene festgelegt. 2 Punkte haben nun 4 Coordinaten; da dieselben jedoch einen bestimmten Abstand haben sollen, so müssen diese 4 Coordinaten einer Bedingungsgleichung genügen, so daß also nur 3 als willkürlich anzunehmen sind. Hieraus folgt, daß wir dreifach ∞ viele Bewegungen in einer Ebene haben. Eine ganz analoge Betrachtung läßt sich anstellen, wenn wir die Beweglichkeit des Raumes finden wollen. Sind nämlich drei Punkte des Raumes festgelegt, so ist damit der ganze Raum fest. An wie viel Stellen des Raumes kann ich nun drei einmal ausgewählte Punkte bringen? Die drei Punkte haben 9 Coordinaten, da jedoch die drei Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks eine bestimmte Länge haben sollen, so haben ihre Coordinaten 3 Bedingungsgleichungen zu genügen, so daß nur 6 von ihnen willkürlich zu wählen bleiben. Also zeigt sich ∞^6 Bewegungen des gewöhnlichen Raumes in sich. Auf Grund der Analogie mit der gewöhnlichen Ebene und dem gewöhnlichen Raum führen wir eine gleiche Betrachtung für die $n$fache Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung aus.

Wir werden nun jetzt ein Gebilde, bestehend aus n Punkten ins Auge fassen, welches die nfache Mannigfaltigkeit vollständig festlegen wird, diese n Punkte haben n² Coordinaten. Aber, wenn diese n Punkte bewegt werden sollen, so muß der Abstand jedes einzelnen Punktes von einem beliebigen anderen unverändert bleiben. Da es nun $\frac{n.(n-1)}{2}$ solcher Abstände gibt, nämlich genau so viel, als wir die n Punkte zu zweien kombinieren können, so haben die n² Coordinaten $\frac{n.(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zu genügen, so daß nur $n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$ Coordinaten für die neun Punkte beliebig zu wählen sind, in welche die ersten n Punkte bei der Bewegung übergehen sollen. Riemann sagt nun in der That, daß eine n fachen einfachen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung durch $\frac{n.(n+1)}{2}$ solche Bewegungen in sich versetzbar werden können."

Von den geschilderten Raumpunkte aus geht Riemann nun dazu über, den wirklichen Raum in Betracht zu ziehen. - Alle bisherigen Untersuchungen waren abstrakter analytischer Natur. Was können wir nun auf Grund der allgemeinen Betrachtung von dem thatsächlich gegebenen Raum aussagen? Unser Raum besitzt thatsächlich eine sechsfach unendliche Zahl von Bewegungen, durch welche jeder Punkt in jeden anderen, jedes Büschel geodätischer Linien in

jedes andere übergeführt werden kann.). Riemann erkennt so in dem Raume eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung, (insbesondere wird sich das Bogenelement unseres Raumes auf die Normalform bringen lassen.) Nun sieht sich Riemann vor die Frage gestellt, welches denn der Wert des konstanten Krümmungsmasses ist. Ist derselbe gleich 0, so haben wir die Elemente der gewöhnlichen euklidischen Geometrie. Ist er negativ, so haben wir die hyperbolische Geometrie, d.h. die Geometrie, die Gauss, Lobatschefsky, Bolyai zum Gegenstand ihrer Forschung gemacht hatten. Aber wie steht die Sache, wenn er positiv ist? Ja, an diesen Fall hatte man bisher noch nicht gedacht, oder vielmehr man hatte ihn von vornherein bei Seite geschoben, da man den Raum, wie es ja selbstverständlich sei, als so ausgedehnt annahm. Da macht denn Riemann die Bemerkung, dass man sehr wohl auch diesen dritten Fall zulassen kann. Denn wenn etwa der Raum zwar endlich ist, d.h. in sich zurückläuft, und die Länge der geraden Linien, in denen er in sich zurückläuft, nur sehr gross ist, so merken wir von der ersteren Eigenschaft ja gar nichts, und wir sind daher auch gar nicht berechtigt, diese Möglichkeit auszuschliessen.

Während also die früheren Forscher den Raum selbstverständlich unendlich annahmen, so sagt Riemann: der Raum ist zwar notwendig unbegrenzt,

aber aus der Unbegrenztheit folgt noch nicht die Unendlichkeit. Er gewinnt dadurch die Möglichkeit, neben der Annahme eines negativen oder verschwindenden Krümmungsmaasses, auf welches sich Gauss, Lobatschefsky, Bolyai beschränkt hatten, auch die Möglichkeit positiven Krümmungsmaasses in Betracht zu ziehen, so dass also neben der hyperbolischen und parabolischen Geometrie die elliptische tritt, neben dem Gaussischen Raum ein Riemannscher Raum.

Man wird verstehen, dass in dem Augenblicke als dieser Vortrag Riemanns veröffentlicht wurde, die allgemeinste Aufmerksamkeit sich ihm zuwandte, und in rascher Folge eine grosse Zahl von Arbeiten in Anschluss an denselben entstanden sind. Es kann gar nicht hier die Absicht sein, alle diese Arbeiten durchzusprechen. Wir wollen uns darauf beschränken, nur drei derselben zu nennen. Zwei von ihnen beschäftigen sich damit, ganz allgemein die homogenen Differentialausdrücke $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ zu klassificiren. Wir wissen, eine Schraubenfläche z. B. ist zwar in sich beweglich, doch besitzt sie nicht das volle Maass der Beweglichkeit in sich wie eine Fläche konstanter Krümmung. sie läßt nur eine Windung um ihre Axe zu. Ebenso kann auch der $n$fach ausgedehnte Raum möglicherweise

in sich beweglich sein, ohne doch die gesammte Beweglichkeit der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung in sich zu besitzen, und dieses Kriterium bildet die Grundlage für die Classificirung der Formen $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ für n Variable. Die bahnbrechenden Arbeiten sind auf diesem Gebiete die beiden, welche wir erwähnen wollten:

1.) Christoffel Crelle 70. (1869.)

2.) Lipschitz, Crelle 70, 71, 72. (1869-70). Es sind dies sehr schwierige, aber auch sehr schöne Untersuchungen, an die seitdem vielfach angeknüpft ist. Neben diesen beiden Arbeiten haben wir als dritte eine Arbeit auszuführen, die sich speciell mit Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung beschäftigt hat und zwar erst zum Mal klar gestellt hat, was diese für Mannigfaltigkeiten sind. Dieselbe ist wieder von Beltrami geliefert und unmittelbar nach der Publikation von Riemanns Vortrag unter dem Titel: Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante veröffentlicht in den Annali di Matematica ser. 2 II. (1868.)

In dieser Arbeit wird dargelegt, was wir unter Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zu verstehen haben, wie die Normalformen des Bogenelementes für dieselbe herzustellen sind, wenn

welche Bewegungen die Mannigfaltigkeit in sich zulässt, u. s. w. Wir müssen hierauf noch etwas näher eingehen. Uebrigens wollen wir das betreffende Referat in ähnlicher Weise einleiten, wie neulich über die erste Arbeit Beltrami's, wo wir einen Excurs über die Abwickelbarkeit und über die Flächen konstanter Krümmung vorausschickten. Wir werden nämlich zunächst kurz die Theorie der konformen Abbildung von Flächen betrachten, um Beltrami's Resultate später wieder klar praecisieren zu können.

Wir haben gesehen, wenn man 2 Flächen auf einander abwickeln kann, so ist das Bogenelement ds der einen Fläche an jeder Stelle gleich dem der anderen Fläche. Diese Bedingung ist zugleich auch hinreichend für die Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander. Wenn wir jedoch 2 Flächen nicht auf einander abwickeln, sondern nur auf einander konform abbilden wollen, so genügt es, wenn $ds = M\,ds$ ist, wo M irgend welche Funktion des Ortes sein soll. Auch diese Bedingung ist zugleich hinreichend und notwendig. Bei dieser Beziehung der einen Fläche auf die andere werden beim Uebergang von der einen Fläche zur anderen die Bogenelemente an jeder Stelle in bestimmtem Maasse vergrößert resp. verkleinert, die Figuren an dieser Stelle

auf beiden Flächen werden daher einander nicht kongruent, sondern ähnlich werden, wobei aber das Ähnlichkeitsverhältniß für die verschiedenen Orte wechselt, da M nicht konstant zu sein braucht. Die Winkel übertragen sich dabei ungeändert.

Nun wollen wir einmal 4 verschiedene zweidimensionale Mannigfaltigkeiten neben einander stellen.

1.) Die erste sei die Ebene, die mit elliptischer Maaßbestimmung ausgestattet ist, oder wie wir kurz sagen wollen, die elliptische Ebene. Wir legen unseren Betrachtungen gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten zu Grunde. Es sei dann der Fundamentalkegelschnitt als Kreis gegeben durch $x_1^2+y_1^2+a^2=0$, die Konstante k sei gleich $\frac{a}{2}$. Das Bogenelement dieser elliptischen Maaßbestimmung wollen wir ds_1 nennen. Es ist dann gemäß früherer Untersuchungen:

$$ds_1^2 = \frac{dx_1^2+dy_1^2+\frac{(y_1\,dx_1-x_1\,dy_1)^2}{a^2}}{\left(1+\frac{x_1^2+y_1^2}{a^2}\right)^2}$$

2.) Daneben stellen wir die parabolische Ebene, d. h. die Ebene, die mit parabolischer Maaßbestimmung ausgestattet ist. In derselben gelten geradezu die gewöhnlichen Euklidischen Maaßbestimmungen. Wenn wir die rechtwinkligen Coordinaten in derselben x_2, y_2

nennen, so ist: $ds_2 = dx_2^2 + dy_2^2$.

3.) Endlich zählen wir die hyperbolische Ebene, d.h. die Ebene mit hyperbolischer Maßbestimmung. In diesem dritten Falle wollen wir mit x_3, y_3 die rechtwinkligen Coordinaten der Ebene bezeichnen. Es soll dann $x_3^2 + y_3^2 - z^2 = 0$ der Fundamentalkreis für unsere hyperbolische Maassbestimmung sein. Es wird für das Bogenelement ds_3 bei gehöriger Annahme von k eine ganz ähnliche Formel gelten wie für ds, unter 1), die wir erhalten, wenn wir in jener $-a^2$ für a^2 substituieren. Es wird so:

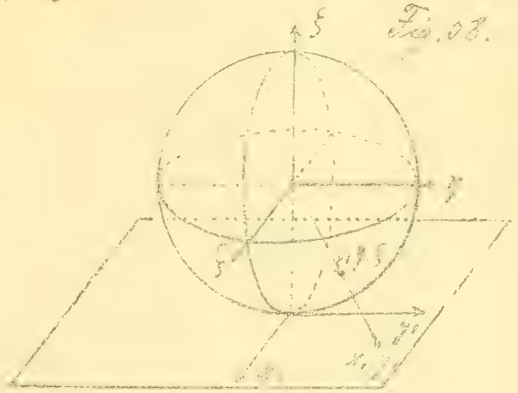
$$ds_3^2 = \frac{dx_3^2 + dy_3^2 - \frac{(y_3\,dx_3 - x_3\,dy_3)^2}{a^2}}{\left(1 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{a^2}\right)^2}$$

4.) Nun wollen wir neben diesen 3 Mannigfaltigkeiten noch eine Kugel annehmen, die durch die Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$ in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sein möge. Das gewöhnliche Bogenelement ds der Kugel ist dann gegeben durch: $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$. — Nun kommt unsere Aufgabenstellung: Wir sollen die Mannigfaltigkeiten 1, 2, 3 auf die Kugel 4 konform abbilden und zwar in möglichst einfacher Weise. Wir werden die 3 Fälle einzeln durchgehen. Wir wollen die Kugel gezeichnet denken, eine Horizontalebene berührend;

der Berührungspunkt sei der Anfangspunkt $x=0$, $y=0$ der Coordinatenbestimmung in dieser Ebene. Die Coordinatenaxen $\xi\,\eta$ mögen vom Mittelpunkt der Kugel parallel zur x und y Axe, die Axe ξ senkrecht zur xy-Ebene positiv nach oben gerechnet gelegen sein.

Betrachten wir nun zunächst den Fall daß die xy Ebene die elliptische Ebene $x_1\,y_1$ darstellt. Wenn wir dann eine <u>Centralprojektion</u> der Ebene vom Mittelpunkte der Kugel vom Radius a aus vornehmen, so wißen wir gemäß früherer Betrachtung, daß durch diese Beziehung die elliptische Geometrie der Ebene sich geradezu mit der Geometrie auf der Kugel deckt. Unsere Aufgabe ad 1 erledigt sich daher ohne weiteres von selbst. Denn bei dieser so hergestellten Beziehung der elliptischen Ebene auf die Kugel sind die entsprechenden Bogenelemente ds_1 und ds einander gleich, so daß nicht nur eine konforme Abbildung der Ebene auf die Kugel, welche nur Proportionalität von ds_1 und ds verlangt, sondern sogar die Abwickelbarkeit der Ebene auf die Kugel dargethan ist.

Fig. 38.



Wir wenden uns daher gleich zu dem zweiten und dritten Teil unserer Aufgabe, die parabolische und hyperbolische Ebene konform auf die Kugel abzubilden. Wir wollen gleich die Lösung geben, indem wir die Behauptung aufstellen:

„Eine konforme Abbildung der Kugel auf die parabolische, bezw. hyperbolische Ebene wird geleistet, wenn wir die Kugel stereographisch bezw. orthographisch auf die xy Ebene beziehen."

Dies ist ein sehr einfaches Resultat; wir werden dasselbe als richtig nachweisen, indem wir die bezüglichen Formeln einfach durchrechnen. Wir werden zugleich aufs Neue eine schöne Deutung für die hyperbolische Geometrie erhalten, an welche weiterhin deren Benutzung in der Funktionentheorie anknüpfen wird. Schließlich werden wir auf diese Betrachtung fussend uns der Beltramischen Arbeit zuwenden.

Dies die Aufgabe der folgenden Stunde.

Wir führen zunächst den Nachweis, daß, wie die Behauptung sagt, die parabolische Ebene durch stereographische Projection auf die Kugel konform abgebildet wird. Durch die stereographische Projection wird jedem Punkte der Ebene durch einen vom Nordpol der Kugel ausgehenden Strahl ein entsprechender Punkt der Kugel zugeordnet. Die Formeln, welche diese Beziehung in den Coordinaten der Punkte ausdrücken,

dürfen wir wohl einfach mittheilen, da die (übrigens einfache) Ableitung derselben uns nur unnöthig aufhält.

Die Formeln, welche die Coordinaten eines Punktes in der Ebene durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes auf der Kugel ausdrücken, sind:

$$x_2 = 2a \cdot \frac{\xi}{a-\zeta}, \qquad y_2 = 2a \cdot \frac{\eta}{a-\zeta}.$$

Umgekehrt sind die Formeln welche die Coordinaten eines Punktes auf der Kugel durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes in der Ebene ausdrücken gegeben durch.

$$\xi = \frac{4a^2 x_2}{N}$$
$$\eta = \frac{4a^2 y_2}{N}$$
$$\zeta = \frac{a(x_2^2 + y_2^2 - 4a^2)}{N},$$ wo N die Abkürzung bedeutet:

$$N = x_2^2 + y_2^2 + 4a^2.$$

Es ergiebt sich aus diesen Beziehungen noch die kurze Formel:

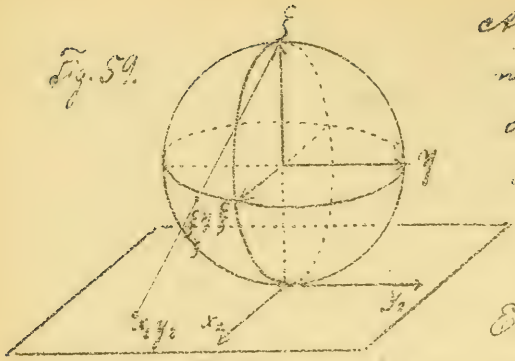
$$a - \zeta = \frac{8a^3}{N},$$ welche wir gleichfalls wegen späterer Anwendung merken wollen.

Wir wollen nun die Beziehung zwischen ds_2 und $d\sigma$ aufsuchen. Es ist: $ds_2^2 = dx_2^2 + dy_2^2$. Drücken wir hierin gemäß der obigen Formeln dx^2 und dy^2 durch $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ aus, so kommt nach einiger Umformung:

$$ds_2^2 = \frac{4a^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{(a-\zeta)^2}$$ oder:

$$ds_2 = \frac{2a}{a-\zeta} d\sigma.$$

Fig. 59.

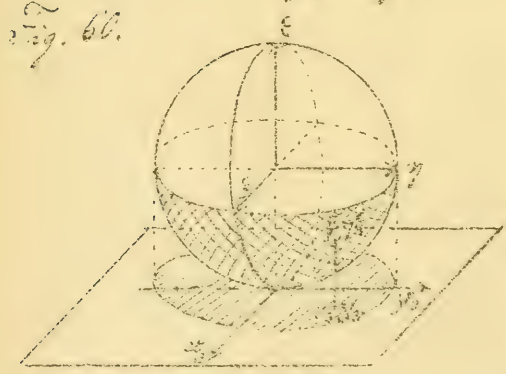


Aus dieser Formel ersehen wir sofort, daß in der That durch die stereographische Projection die parabolische Ebene auf die Kugel konform abgebildet ist. Eine analoge, aber noch viel leichtere Rechnung haben wir nun für den Fall der orthographischen Projection zu führen, welche die konforme Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die Kugel leisten soll. Es seien x_3 y_3 die Coordinaten in der Horizontalebene, die Kugel habe wieder den Radius a.

Es ist offenbar:

$$x_3 = \xi,$$
$$y_3 = \eta.$$

Fig. 60.



Wir haben in der hyperbolischen Ebene die Maaßbestimmung, die sich auf den Kreis $x^2+y^2-a^2=0$ gründet, nur im Innern dieses Kreises in Betracht zu ziehen. Bei der orthographischen Projection wird dann dieser Bereich der inneren Kreisfläche sowohl auf die obere Hälfte, wie auf die untere Hälfte der Kugel bezogen. Wir wollen die untere Hälfte der Kugel als Bild unserer Ebene bevorzugen.

Nun gilt für ξ die Gleichung:

$\xi = -\sqrt{a^2 - x_3^2 - y_3^2}$, wo das minus-Zeichen gerade unserer Verabredung entspricht. Drücken wir nun gemäß dieser Formeln $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ durch dx_3 und dy_3 aus, so kommt:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dx_3^2 + dy_3^2 - \frac{(x_3\,dy_3 - y_3\,dx_3)^2}{a^2}}{1 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{a^2}}$$

Wenn wir aber den Ausdruck rechts vergleichen mit dem Ausdruck für ds_3, dem Bogenelement der Cayleyschen Ebene, so ist ersterer genau gleich gebaut wie letzterer, nur tritt im letzteren der Nenner im Quadrat auf. Wir haben so die Formel gefunden:

$$ds_3^2 = \frac{ds^2}{1 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{a^2}}$$

. Setzen wir für $a^2 - x_3^2 - y_3^2$ wieder ξ^2 und ziehen auf beiden Seiten die Wurzel, so kommt das einfache Schlußergebnis:

$$ds_3 = -\frac{a\,ds}{\xi}$$

. Dieser Formel haben wir ein minus-Zeichen gegeben, da wir es unserer Verabredung zufolge mit Punkten zu thun haben, für die ξ negativ ist. Auch diese Formel zeigt uns sofort, daß durch die orthographische Projection der Kugel auf die hyperbolische Ebene eine konforme Abbildung beider Flächen geleistet ist.

Zusammenstellung:

1, $ds_1 = d\sigma$. Formel für das elliptische Bogenelement.

2, $ds_2 = \frac{2a}{a-\xi} d\sigma$. Formel für das parabolische Bogenelement.

3, $ds_3 = -\frac{a}{\xi} d\sigma$. Formel für das hyperbolische Bogenelement.

Wir haben so erreicht, was wir am Schlusse der vorigen Stunde in Aussicht gestellt hatten. Wir wollen uns nun gleich zu Folgerungen wenden, die wir aus unserer Betrachtung ziehen können.

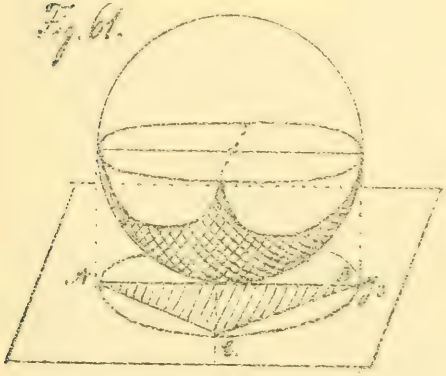
Durch die orthographische Projection wurde die untere Hälfte der Kugel auf die hyperbolische Ebene übertragen. Umgekehrt ergibt die geometrische Betrachtung sofort den Satz:

, Indem wir $ds = -\frac{a}{\xi} d\sigma$ schreiben, übertragen wir die hyperbolische Geometrie so auf die vom Aequator begrenzte Halbkugel, dass der geraden Linie der hyperbolischen Ebene diejenigen Kreise der Kugel entsprechen die auf dem Aequator senkrecht stehen. Die Winkel aber, unter denen sich in der hyperbolischen Ebene zwei gerade Linien schneiden, entsprechen die gewöhnlichen Winkel, unter denen sich die genannten Kreise auf der Kugel schneiden.

Dies ist in der That eine sehr bequeme Abbildung, durch welche wir Verhältnisse häufig augenfällig machen können, die in der hyperbolischen

Geometrie sich als wunderbar erweisen. Betrachten wir z. B. ein Dreieck, dessen sämmtliche Winkel gleich 0 sind. Wir wissen, dass die Ecken eines solchen Dreiecks auf dem Fundamentalkegelschnitt liegen. Es sei ein solches Dreieck einmal begrenzt gegeben durch die y_3 Axe von A nach B und 2 beliebige andere Seiten, die sich in C schneiden mögen. Aus der y_3-Axe entsteht bei der Uebertragung auf die Kugel ein Halbmeridian, aus den anderen beiden Seiten dagegen Halbkreise, die auf dem Aequator senkrecht stehen. (Fig. 61.) Wir nennen es auf der Kugel ein sphärisches Dreieck, dessen 3 Winkel nun ganz offenbar gleich 0 sind. (Der Begriff „sphärisches Dreieck" ist hier natürlich in einer erweiterten Bedeutung gebraucht als gewöhnlich, es bezeichnet ein Dreieck, dessen Seiten in Verticalebenen zu der Aequatorebene liegen.). Wir wenden überhaupt in Bezug auf dies Beispiel den Satz aussprechen dürfen:

Fig. 61.



Die Uebertragung der hyperbolischen Geometrie auf die Kugel ist insofern besonders nützlich, als sie alle Theoreme über Winkelgrößen ohne weiteres vor Augen stellt.

Wir wollen nun noch einen Schritt weiter thun

und die Abbildung 2. und 3. kombinieren. Nämlich: Nachdem wir die hyperbolische Ebene durch orthographische Projection auf die Halbkugel übertragen haben, können wir diese wieder auf die parabolische Ebene stereographisch projicieren. Wenn wir das verbindende Zwischenglied der Abbildung auf die Kugel unberücksichtigt lassen, können wir das so auch sagen: Wir werden die hyperbolische Ebene auf die parabolische Ebene conform abbilden. Die Formel, welche die Beziehung zwischen ds_3 und ds_2 ergiebt, erhalten wir aus den Formeln 2. u. 3. der pag. 228 wie folgt:

$$ds_3 = -\frac{a}{\xi} d\sigma - ds_2 \cdot \frac{a-\xi}{-2\xi} \quad \text{oder wenn wir für } \xi \text{ und } a-\xi$$

die Werte aus den Formeln pag 225 eintragen:

$$ds_3 = \frac{ds_2}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}.$$

In Worten lautet dies Ergebnis:

„Man kann die hyperbolische Ebene so auf die gewöhnliche konform abbilden, daß $ds_3 = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$ wird."

Wir können dieses Resultat jedoch noch anders interpretieren. Anstatt zu sagen, wir übertragen die eine Ebene auf die andere, können wir auch sagen, wir führen $x_2\, y_2$ als gewisse krummlinige Coordinaten in der hyperbolischen Ebene ein. Denn natürlich ent-

sprechen den rechtwinkligen Coordinaten in der gewöhnlichen Ebene, bei der Abbildung in der hyperbolischen Ebene, allgemein zu reden, krummlinige Coordinaten. Wir werden daher sagen:

Wir können in der hyperbolischen Ebene x_2, y_2 so als krummlinige Coordinaten einführen, daß das Bogenelement die Gestalt annimmt:

$$ds_3 = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$$

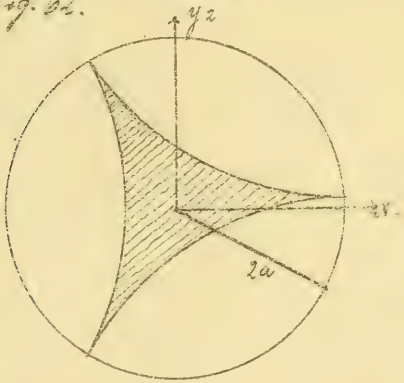
Hier bemerken wir aber sofort, daß die letzte Formel ja gerade die Gestalt hat, welche Riemann als Normalform für das Bogenelement einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung aufgestellt hat. Wir haben so also die Riemannsche Normalform des Bogenelementes für das zweidimensionale Gebiet der hyperbolischen Ebene dargestellt.

Nun wollen wir uns aber die Figuren in der parabolischen Ebene, die bei der conformen Abbildung der hyperbolischen Ebene sich ergeben, einmal näher ansehen. Wir denken also die untere Halbkugel (Fig. 60), welche das Bild der hyperbolischen Ebene ist, durch stereographische Projection auf die gewöhnliche Ebene übertragen. Wir sehen sogleich, der Aequator geht bei der Projection über in einen Kreis vom Radius $2a$. Was aber werden die geradlinigen Linien der hyperbolischen Ebene werden? Dieselben wurden auf der Halbkugel durch Orthogonalkreise des Aequators dargestellt. Nun aber bleiben Kreise bei stereographischer

projection Kreise. Folglich können wir zusammenfassend sagen:

Überträgt man die hyperbolische Geometrie durch konforme Abbildung auf die gewöhnliche Ebene, indem man setzt $ds_3 = \frac{ds_2}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$, so verwandelt sich der Cayleysche Kegelschnitt in einen Kreis vom Radius 2a. Die geraden Linien verwandeln sich in die Orthogonalkreise dieses Grundkreises und die hyperbolisch gerechneten Winkel in die gewöhnlich gerechneten Winkel.

Fig. 62.



In der That ist es auch jetzt sehr einfach, in der parabolischen Ebene z. B. ein Dreieck zu zeichnen dessen 3 Winkel gleich 0 sind. Fig. 62 zeigt ein solches, die Seiten desselben sind Ringe von Orthogonalkreisen zu dem Fundamentalkreis mit dem Radius 2a.

Wir können so alle Theoreme, welche die hyperbolische Geometrie behandelt, aufs schönste uns versinnlichen.

Wir haben diese Betrachtung jedoch nicht deswegen vorgetragen, um abermals eine neue Abbildung für die hyperbolische Geometrie zu geben, sondern aus einem viel weiter reichenden Grunde. Die nicht-euklidische Geometrie tritt

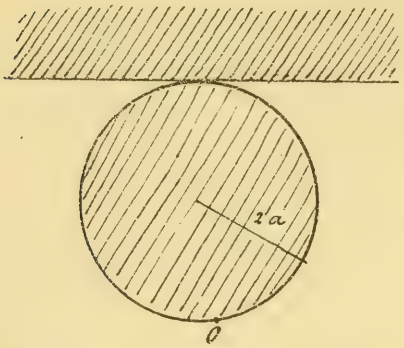
nämlich in der neueren Entwicklung der Functionentheorie ganz maaßgebend auf. Ich denke an solche Untersuchungen, wie sie beispielsweise die Arbeit von Prof. H. A. Schwarz im Bd. 75, Crelle: „Ueber die hypergeometrische Reihe" bringt. In diesem Teil der Functionentheorie man hat man außerordentlich viel mit Kreisbogen zu thun, die gegen einen Fundamentalkreis orthogonal stehen, und bei diesen Betrachtungen leistet dann die nichteuklidische Geometrie in dem Sinne, daß man die Winkel im gewöhnlichen Sinne mißt, die Länge der Bogen dagegen als $\int \frac{ds}{z}$, wesentliche Dienste.

Wir können schon jetzt darauf hinweisen, daß diese Verhältnisse in der Vorlesung des nächsten Semesters uns eingehend beschäftigen werden. Dabei werden wir also die Gleichung $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\frac{1 - x^2 + y^2}{4a^2}}$ unseren Betrachtungen zu Grunde legen müssen.

Doch dies nebenbei. Wir können nun die Figuren und Formeln noch ein wenig modificiren. Nämlich wenn wir eine Transformation durch reciproke Radien vornehmen und den Mittelpunkt derselben als einen Punkt unseres Orthogonalkreises wählen, so wird das Innere des Kreises in eine Halbebene verwandelt werden. Hierbei wird der Kreis selbst der Begrenzungslinie der Halbebene entsprechen. Vgl. die Figur wo P der Mittelpunkt der Transformation und der (nicht gezeichnete) Inversionskreis den Radius $2a$ besitzt. Diese Transformation stellt nebenbei eine konforme Abbildung dar, wir werden sehen, was auch

dementsprechend unsere Figuren und Formeln modificieren.

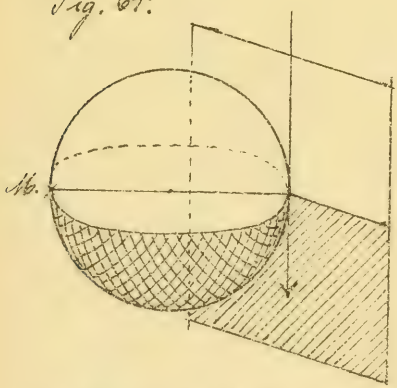
Fig. 63.



Vorerst jedoch wollen wir noch eine Bemerkung vorausschicken, nämlich folgende:

„Wir hätten auch direkt von unserer Hilfskugel zur Halbebene übergehen können, indem wir die stereographische Projection nicht vom obersten Punkte der Kugel aus, sondern von einem Punkte ihres Aequators aus auf die diesem zugehörige Antipodenebene vornahmen. Hierbei geht, wie man sofort sieht, die Aequatorlinie in die Begrenzungsgerade der Halbebene über. —

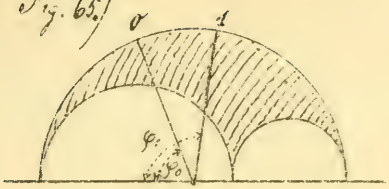
Fig. 64.



Wir wollen nun die einfachen Formeln und Figuren, die sich bei der Abbildung auf die Halbebene ergeben, noch mitteilen.

Aus den Orthogonalkreisen in der früheren parabolischen Ebene werden wieder Orthogonalkreise und zwar Orthogonalkreise zur Begrenzungslinie werden, die Fig. 62. wird daher in die Fig. 65. übergehen. Die Begrenzungslinie selbst entspricht dabei natürlich dem unendlich Weiten, dem fundamentalen Kegelschnitt der Cayleyschen Ebene. Das ds der

Fig. 65.)



hyperbolischen Geometrie wird sich jetzt, wenn wir die Begrenzungslinie als X-Axe wählen, die y-Axe dagegen in einer beliebigen Lage senkrecht zu derselben, folgendermaßen ausdrücken: $ds_3 = a \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$, wie wir mit Unterdrückung der Zwischenrechnung mitteilen.

Wenn wir dann z. B. wissen wollen, wie lang der bestimmte Kreisbogen von 0 bis 1 der Halbebene in der hyperbolischen Geometrie ist, so haben wir $\int ds_3$ nur längs desselben von 0 bis 1 auszuführen. Dies aber läßt sich ganz einfach machen, wenn wir den Hilfswinkel φ einführen als Winkel des Radius gegen die Begrenzungslinie der Halbebene. Dann ergibt sich bald das Integral $\int_0^1 ds_3 = a\left(\log.tg.\frac{\varphi_1}{2} - \log.tg.\frac{\varphi_0}{2}\right)$ sei.

So haben wir also schließlich die hyperbolische Geometrie in eine Form gebracht, an der sie außerordentlich konkret zur Anschauung gebracht ist. Gerade diese Form der hyperbolischen Geometrie ist es auch, die der französische Mathematiker Poincaré, mit dem wir uns im nächsten Semester noch eingehend werden zu beschäftigen haben, seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat.

Wir wollen nun dazu übergehen, die beabsichtigte

Anwendung von unserer Betrachtung zu machen, indem wir über die bereits erwähnte Abhandlung von Beltrami referieren: Teoria fundamentale degli spazii di curvatura constante. Es handelt sich in derselben geradezu um folgendes:

Beltrami macht sich den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung klar, indem er alle Formeln, welche wir für $n=2$ gaben, für ein beliebiges n aufstellt.

Hierbei ist jedoch ein wesentlicher Unterschied gegenüber unserer Betrachtungsweise darin begründet, daß er die Cayley'sche Abhandlung nicht kennt. Er legt dem entsprechend der Betrachtung der Maßbestimmung nicht die Cayley'schen Entwickelungen für n Variable, sondern gleich die „Kugel" des $(n+1)$ fach ausgedehnten Raumes zu Grunde, ganz dementsprechend, wie wir in der letzten Stunde die elliptische, parabolische, hyperbolische Maßgeometrie in der Ebene auf die gewöhnliche Kugel übertragen haben.

Sei im R_{n+1} die Kugel „vom Radius a" gegeben durch die Gleichung: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n+1}^2 = a^2$, so wird das „gewöhnliche" Bogenelement auf dieser Kugel dargestellt durch: $ds = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_{n+1}^2}$.

Die so auf der Kugel festgelegte Maßbestimmung ist nun für Beltrami ohne Weiteres das Bild einer Maßbestimmung konstanter positiver Krümmung $\frac{1}{a^2}$ einer

n-fachen Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung.

Um nun weiter auch die Maassbestimmung im nfach ausgedehnten Raume konstanter negativer Krümmung zu begründen, setzt Beltrami auf der Kugel des Raumes von (n+1) Dimensionen $ds = -\frac{r\,d\rho}{\xi_{n+1}}$. Insbesondere eliminiert er hieraus die Variable ξ_{n+1}. So bekommt er im Raum von n Dimensionen $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ durchaus die gleiche Maassbestimmung, welche sich in Cayleyscher Weise ergeben würde, wenn man daselbst die Kugel $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = a^2$ als absolutes Gebilde zu Grunde legte und die charakteristische Konstante $k = \frac{a}{i}$ nähme.

Wir erkennen, dass es sich in der That um dieselben Betrachtungen und Formeln handelt, wie in letzter Stunde, nur sind dieselben ausgedehnt auf n Variable.

Z.B. werden dies noch besser einsehen, wenn wir als Beispiel des letzten Falles den Fall n = 3 näher betrachten. In diesem Falle wird $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = a^2$, indem wir ξ_1, ξ_2, ξ_3 als rechtwinklige Coordinaten des Euklidischen Raumes deuten, eine Kugel im gewöhnlichen Sinne des Wortes ergeben, und wir würden uns vorzustellen haben, dass wir im Innern dieser Kugel eine Konstruktion mit den geraden Linien, Punkten u. s. w. vornehmen, gerade so wie wir in der hyperbolischen Ebene im Innern des Fundamentalkreises operiert haben. Es ist dies natürlich nur ein specieller Fall der hyperbolischen Geometrie der R_3. Denn wie wir in

Cayley's Maassgeometrie der Ebene allgemein auch eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel zu Grunde legen könnten, wenn es überhaupt nur ein eintheiliger Kegelschnitt wäre, so würde man auch hier im Raume von 3 Dimensionen die hyperbolische Maassbestimmung statt auf die Kugel, auf ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid, d. h. irgend welche eintheilige nicht geradlinige Fläche 2. Grades als absolutes Gebilde beziehen können.

Wir haben nun demnächst von den Arbeiten von Helmholtz über die nichteuklidische Geometrie zu berichten; Helmholtz kennt ebenfalls Cayley's Maassgeometrie als solche nicht. Er gebraucht dementsprechend in seinen Untersuchungen einen Ausdruck, den wir eben nur gut verstehen können, und den wir dementsprechend hier gleich mittheilen wollen, damit wir späterhin mit demselben bereits vertraut sind. Helmholtz nennt nämlich diese besondere Art der Cayley-schen Maassgeometrie des Raumes von 3 Dimensionen, auf welche wir hier geführt wurden, wo nämlich als absolutes Gebilde speciell eine Kugel des gewöhnlichen Raumes, vom Radius a, zu Grunde gelegt ist, während die charakteristische Konstante $= \frac{a}{i}$ genommen wird, „Beltrami's kugelförmiges Abbild der nicht-euklidischen Geometrie."

Im übrigen muss ich jetzt gegen einen gewissen

Kindt der Beltramischen Untersuchung polemisieren. Es handelt sich um eine Behauptung, die er in dem „Saggio" und in der „Teoria" ausspricht. Haben wir zunächst zu der Mannigfaltigkeit zweier Dimensionen zunächst ($n=2$), so werden wir gewiß sagen, auf der durch $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ gegebenen Kugel herrscht (dem Bogenelemente ds entsprechend) in jedem Punkte das konstante positive Krümmungsmaß $\frac{1}{a^2}$. Die Geometrie auf dieser Kugel ist nun für Beltrami, wie wir sagten, geradezu der Typus für die Theorie der Geometrie auf Flächen konstanter positiver Krümmung. Wenn wir nun auf der Kugel 2 geodätische Linien ziehen, so wissen wir, dass sie sich diesseits in 2 diametral gegenüberliegenden Punkten.

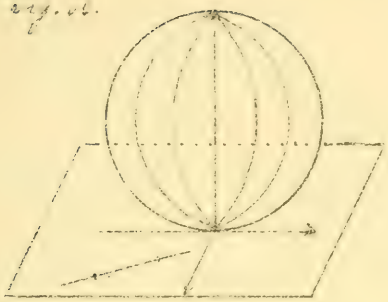
Wenn wir aber die Kugel durch Centralprojection auf die Ebene abbilden und so die abgewickelte Mannigfaltigkeit in der Ebene betrachten, so schneiden sich die geraden Linien daselbst nicht in zweien, sondern nur in einem Punkte. Wir haben ja auch bereits besprochen, worauf die Schwierigkeit liegt, sich diese Beziehung zwischen der Kugel und der Ebene genau vorzustellen. Wir haben also die Ebene als eine Doppelfläche aufzufassen, im Gegensatz zu der Kugel, die eine einfache Fläche darstellt. Es werden sich ja auch die geraden Linien der Ebene zweimal schneiden, wenn wir uns die Ebene als doppelt überdeckt denken wollen. Denn es

werden dann die geraden Linien erst geschlossen sein, wenn wir zweimal die Ebene durchlaufen haben, nämlich einmal die Vorderseite, das andere Mal die Unterseite der Ebene. Wir werden so auch 2 Schnittpunkte der geraden Linie erhalten, doch liegen dieselben auf den beiden Seiten der Ebene genau über einander, sind also schließlich doch nur ein Schnittpunkt. Dies wird jedoch von Beltrami nicht beachtet, und dem entsprechend stellt er allgemein den Satz auf:

„In einem Raum von 2 Dimensionen konstanter positiver Krümmung müssen sich 2 geodätische Linien immer in 2 Punkten schneiden."

Wir wollen zunächst noch bis zu einer gewissen Zustimmung dieser Behauptung vordringen. Wenn wir nämlich irgend 2 Punkte in der Ebene annehmen, so geht durch diese auf alle Fälle nur eine geodätische Linie, nämlich die Verbindungslinie. Wenn wir aber auf der Kugel zwei Punkte insbesondere diametral gegenüber nehmen, so geht durch dieselben offenbar ein ganzer Büschel geodätischer Linien, z.B. größter Kreise hindurch. Wenn wir daher in der gewöhnlichen Geometrie lernen, daß eine gerade Linie stets durch 2 ihrer Punkte bestimmt ist, so läßt sich dieser Satz z.B. allgemein auf die Kugel übertragen. Also, sagt Beltrami, ist mit der Annahme eines konstanten positiven Krümmungsmaßes jenes sogenannte Axiom der Geometrie nicht verträglich. Von unserem

Fig. 11.



Standpunkte aus müssen wir diese Behauptung natürlich als eine irrige zurückweisen, wir wollen darüber hinaus darauf aufmerksam machen, daß der Zusammenhang, den die Flächen, auf denen eine bestimmte Form des Fadennetzes gilt, im Großen und Ganzen haben, ein verschiedener sein kann. Wir bemerken übrigens, daß wir diese Behauptung Beltrami's besonders deswegen so scharf zurückweisen müssen weil einmaliger Einspruch nicht genügt hat,*) indem immer wieder und von neueren Autoren auf Beltrami's Behauptung zurückgegriffen wird. Sie werden das bisher Gesagte zusammenfassend schwerlich aussprechen:

„Wenn Beltrami die in sich zurückkehrende Fläche als Typus der Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung nimmt, kommt er zu dem falschen Satze, daß auf jeder solchen Mannigfaltigkeit gewisse Verhältnisse vorliegen müssen die auf der Kugel in der That vorliegen, daß nämlich auf jeder solchen Mannigfaltigkeit zwei geodätische Linien, die sich schneiden, sich immer in zwei Punkten schneiden müssen und daß also die geodätische Linie nicht ausnahmslos durch 2 ihrer Punkte bestimmt ist, so daß also das

*) Vergl. Math. Annalen, VI, p. 125; wir kommen hierauf übrigens noch später zurück.

sogenannte Axiom von der graden Linie nicht unbeschränkt gültig erscheint.)

Wir wenden die Streitfrage, die hier vorliegt, wie wir schon andeuteten, positiv wendend, indem wir folgendermaßen sagen:

„Durch die Form des Bogenelementes ist der Zusammenhang, welchem eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung besitzt, schon noch keineswegs vollständig bestimmt, vielmehr wird es ein neues Problem sein, nachdem man das Bogenelement der Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung kennt, nun alle Zusammenhänge aufzuzählen, die mit diesem Bogenelement verträglich sind."

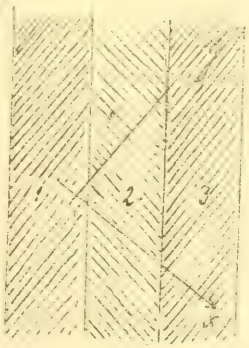
Wollen wir doch einmal sehen, wie sich diese Verhältnisse in der Euklidischen Geometrie gestalten. Wenn wir eine Euklidische Ebene haben, so können wir auf dieselbe einen beliebigen geschlossenen Cylinder, beispielsweise einen Rotationscylinder beliebig oft abrollen, es wird dabei die Ebene in Streifen zerfallen, deren jeder für sich die Cylinderfläche darstellt, wenn man ihn aus der Ebene herausgeschnitten und seine Ränder geradlinig zusammengefügt denkt. Was nun die Geometrie auf dem Cylinder angeht, so erkennen wir sofort, daß wir dem Bogenelement auf ihm die Form $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ geben können, (eine Form, die ausnahmslos und für alle

Punkte desselben gilt *). Denn wenn wir in der Ebene ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem angenommen haben, dass wir auf den Cylinder übertragen wollen, so wird jeder Punkt desselben zwar ∞ viele Coordinatenpaare besitzen, je nachdem wir ihm dem entsprechenden Punkte auf dem ersten, zweiten, dritten etc. Streifen in der Ebene zuordnen. Aber wenn wir von einem Punkte zum Nachbarpunkte übergehen, so wird der Abstand beider stets gegeben sein durch $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Aber darum hat die Cylinderfläche doch einen ganz anderen Zusammenhang als die Ebene. Dementsprechend ist auch die Geometrie der auf ihr Figuren auf dem Cylinder natürlich eine ganz andere wie in der Euklidischen Ebene.

a)

Fig. 67.

b)



Je zwei geodätische Linien auf dem Cylinder z. B. welche durch gewöhnliche Schraubenlinien dargestellt werden, schneiden sich im unendlich

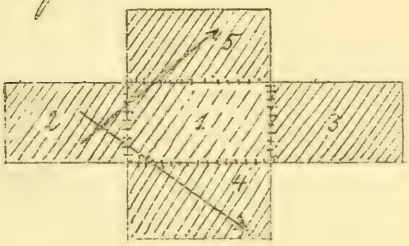
*) Wenn wir in der projectiven Geometrie dem Cylinder „eine Spitze" im Unendlichen zuschreiben, so ist dies natürlich nur eine Fiction, um ihn als Grenzfall einer Kegelfläche ansehen zu können, hierauf ist im Texte keine Rücksicht zu nehmen.

vielen Punkten während die entsprechenden geraden Linien in der Ebene nur einen Punkt gemeinsam haben. Um diesen Unterschied weg zu nehmen, könnten wir zwar sagen, wir müßen uns den Cylinder ∞ oft umwickelt denken, dann schneiden sich die beiden Schraubenlinien ∞ nur in einem Punkte, aber die Betrachtung einer derartigen unendlichen Ueberdeckung ist doch nur eine Hülfsbetrachtung, die wir künstlich einführen, um die Uebereinstimmung mit der Ebene herbeizuführen, in der That schneiden sich eben die Linien wiederholt.

Wir wollen jetzt diesen Gedanken in allgemeinerer Weise fassen. Wir zerlegten die Ebene soeben in ∞ viele congruente Streifen. Denken wir uns jetzt z. B. ein Rechteck in der gewöhnlichen Ebene gegeben, so können wir doch an dasselbe beliebig viele kongruente Rechtecke so anreihen, daß die ganze Ebene vollständig überdeckt wird. Denken wir uns nun das eine Rechteck herausgeschnitten und aus einem dehnbaren Stoff bestehend, so können wir zunächst die beiden Längsseiten desselben mit einander vereinigen, hierauf dann auch noch die beiden anderen Begrenzungslinien, sodaß wir einen Ring erhalten würden. Nun wollen wir auf diesem Ring dieselben Coordinaten benutzen, die wir in der Ebene haben, und geradezu das Bogenelement von der Ebene auf den Ring übertragen, wodurch wir auf diesem eine bestimmte Art der Maaßbestimmung

erhalten, die natürlich mit den elementaren Maafsverhältnissen, die auf der Ringfläche herrschen mögen, nichts zu thun hat. Wieder werden dann jedem Punkte des Ringes ∞ viele Coordinatenpaare x, y zuzuordnen sein, ähnlich wie wir es bei dem Beispiel des Rotationscylinders gesehen haben.

Fig. 68.



Dagegen wird das Bogenelement an jeder Stelle die wohlbestimmte Form haben: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, welches dieser Coordinatenpaare wir auch benutzen.

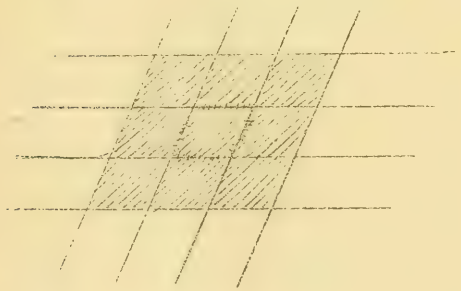
Denn sind x, y und x_1, y_1 irgend zwei Coordinatenpaare, die auf denselben Punkt der Ringfläche hessen, so sind alsdann x und x_1, y und y_1, verschieden, es ist aber doch $dx = dx_1$, $dy = dy_1$. So haben wir in der Ringfläche eine 2 dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem eindeutig bestimmten Bogenelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, genau wie in der gewöhnlichen Ebene. Doch ist die „Zusammenhang" beider Flächen durchaus verschieden. Hierin, d. h. im Unterschied des Zusammenhangs, liegt es dann auch begründet, daß die Ringfläche im Gegensatz zu der Ebene, wohlverstanden bei Festhaltung des Bogenelementes ds, endlich ist, d. h. einen endlichen Inhalt besitzt. Umgekehrt können wir dann sagen:

Wenn wir in der Ebene das Bogenelement ds

jeder Stelle = $\sqrt{dx^2+dy^2}$ setzen, so ist damit noch gar nicht die Unendlichkeit der Ebene bedingt; die Ebene könnte ebenso gut eine Ringfläche sein.

Allgemein erkennen wir, daß die verschiedenen Beispiele geschlossener Mannigfaltigkeiten aufzustellen möglich sind, bei denen in jedem Punkte ein durch=aus bestimmter Differentialausdruck von verschwinden=der Krümmung konstruiert werden kann. Wir wollen uns geradezu allgemein fragen, wie wir alle solche Mannigfaltigkeiten finden können, auf denen wir uns einen solchen Ausdruck $V dx^2+dy^2$ bestimmen können der in allen Punkten eindeutig ist. Offenbar werden wir uns nur die Aufgabe zu stellen haben, die Ebene auf die Weise in kongruente Stücke zu zerlegen. Wir können so z. B. die Ebene statt in Rechtecke in Parall=elogramme, in reguläre Sechsecke u. s. w zerlegt denken. Wir können dann allgemein den Grundsatz aufstellen:

Fig. 69.



„Man wird einer jeden Art entsprechend, die Ebene in lauter kongruente Parcellen zu zerlegen, sich Flächen von bestimmten Zusammenhangsverhältnissen konstru=iren können, auf denen man krummlinige

Coordinaten x, y so einführen kann, daß $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eindeutig ist. Man braucht dann nämlich nur die einzelne Parcelle der Ebene herauszuschneiden, und sich ihre Randpunkte in zweckmäßiger Weise zusammengeheftet zu denken.

Dieses Problem, welches wir hiermit für den Fall der gewöhnlichen Ebene besprochen haben, können wir analog auch für die elliptische und hyperbolische Ebene aufstellen. Auch hier werden wir uns die Aufgabe stellen können, die verschiedenen Zusammenhangsverhältnisse zu construiren, mit denen das Bogenelement der elliptischen oder hyperbolischen Ebene verträglich ist. Wir werden wieder die Lösung derselben darin finden, daß wir das Innere des Fundamentalkegelschnittes in kongruente Parcellen zerlegen, welche dasselbe gerade einmal überdecken und aus einer solchen Parcelle dann uns in geeigneter Weise durch Vereinigung der Ränder eine Fläche herstellen. Wir werden dieses in nächster Stunde noch näher zu betrachten haben. In der That wollen wir gleich bemerken, was uns hier als eine rein geometrische Speculation entgegentritt, wird auch in gewissen Teilen der neueren Functionentheorie eingehend behandelt. Dieselben erwachsen geradezu daraus, daß wir die hyperbolische Ebene in solche kongruente Parcellen zerlegt denken, in ähnlicher Weise, wie man zu den doppelt periodischen Functionen gelangt,

indem man von der Zerlegung der parabolischen Ebene in Parallelogramme ausgeht. Eben dies soll uns in nächster Stunde noch ausführlicher beschäftigen.

Was die Einteilung der hyperbolischen Ebene in kongruente Gebiete anbetrifft, die in ihrer Gesammtheit die Ebene genau einmal überdecken, so wollen wir bemerken, daß es eine außerordentlich große Zahl solcher Zerlegungen giebt. Bei diesen macht man gern von der Darstellung der hyperbolischen Ebene Gebrauch, in welcher dieselbe auf das Innere eines Kreises, der dem Fundamentalkreise entspricht, abgebildet wird. Wie wir gesehen haben, werden die geodätischen Linien durch die Kreise gegeben, die zu den begrenzenden Kreisen orthogonal stehen. Infolge dessen kann man eine größere Anzahl neben einander liegender Polygone besser zeichnen, also wenn man an den geradlinigen Figuren der Cayley'schen Ebene festhält. Um sich einen klaren Begriff von dieser Einteilung des Kreisinnern in kongruente Parcellen zu verschaffen, verweisen wir z. B. auf die Figuren im Bd. 20 der Math. Annalen auf Tafel I. zu dem Aufsatze von W. Dyck. („Gruppentheoretische Studien.")

Ferner wollen wir jetzt in Kürze darauf eingehen, in wie fern diese Zerlegung der hyperbolischen Ebene ganz besonders functionentheoretisches Interesse besitzt. Um dies auseinanderzusetzen, wollen wir jene Deutung der hyperbolischen Geometrie anwenden,

die wir auf pag. 235. gegeben haben. Es ist der feste Kreis hierbei zur reellen Axe gestreckt, und die geodätischen Linien treten als Orthogonalkreise zu dieser Axe auf. Diese Ebene wollen wir nun als die $(x+iy)$-Ebene wählen und im betreff derselben einiges lernen.

Wenn wir uns zunächst fragen, wie in der gewöhnlichen $x+iy$ Ebene sich die verschiedenen Drehungen und Parallelverschiebungen bei parabolischer (Euklidischer) Maassbestimmung darstellen, so wissen wir, daß dieselbe durch die Formel: $z' = e^{i\varphi} \cdot z + b$ ausgedrückt werden, wo z für $x+iy$ gesetzt ist. Denn der Factor $e^{i\varphi}$ entspricht einer Drehung der Ebene um den Winkel φ, (um den Punkt $z=0$); die hinzugefügte Constante bezeichnet die Parallelbewegung. Wir wollen bei der letzten Formel besonders beachten, daß in derselben rechts 3 willkürliche Parameter auftreten, wir können ja für b setzen $a+ib$, wo a und b ihrerseits reelle Größen sind. Diese drei Parameter φ, a, b geben eben an, daß eine 3fach unendliche Mannigfaltigkeit von Bewegungen in der Ebene möglich ist.

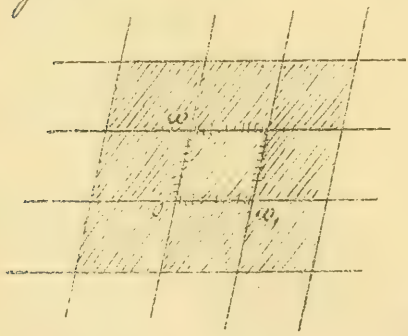
Etwas ähnliches ist nun bei unserer Darstellung der hyperbolischen Ebene der Fall, von dem wir hier erzählen wollen, ohne auf die Beweise unserer Behauptungen einzugehen. Es war das Bogenelement, wie wir wissen, ausgedrückt durch $ds = \frac{a}{y}\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Die hyperbolische Ebene gestattet doch auch, wie wir

bereits früher sahen, 3 fach ∞ viele Bewegungen, wobei jetzt die begrenzende gerade Linie, d. h. die Abscissenaxe der xy-Ebene, in sich selbst verschoben wird. Man wird nun fragen, wie sich diese Bewegungen analytisch ausdrücken. Wir behaupten, daß dieselben gegeben sind durch die Formel $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell und dabei die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sei, so daß wir sehen, wir haben wirklich 3 willkürliche Parameter. In Worten sagt diese Behauptung, daß jede Bewegung der vermöge unserer Verabredung mit hyperbolischer Maassbestimmung versehenen Ebene in sich durch eine gebrochene lineare Substitution mit reellen Coefficienten und der Determinante 1 darstellbar ist.

Nun machen wir folgenden Vergleich: Wir

Fig. 70.



wollen uns zunächst wieder die gewöhnliche Ebene denken und zwar sei dieselbe zerlegt in unendlich viele kongruente Parallelogramme, wie Fig. 70 es zeigt. Wenn in einem bevorzugten Parallelogramm nun die eine Ecke im Punkte O, die beiden anderen entsprechend im Punkte ω, ω_2 liegen, wo ω_1, ω_2 komplexe Werte sind, so können wir unmittelbar sagen:

Es wird durch $z' = z + m_1 w_1 + m_2 w_2$ unter m_1, m_2 beliebige ganze Zahlen verstanden, die Gesamtheit aller der Verschiebungen angegeben werden, welche aus dem ursprünglichen Parallelogramm ein beliebiges anderes herstellen. Wir sehen hieraus sofort den Zusammenhang mit den doppelt periodischen Funktionen. Eine solche ist nämlich eine Funktion $f(z)$, die doppelperiodisch mit den Perioden w_1, w_2, wenn $f(z + m_1 w_1 + m_2 w_2)$ das selbe ist wie $f(z)$ selbst. Es deutet sich also schon geometrisch so an, daß man sagt, die Werte, die $f(z)$ im ersten Parallelogramm annimmt, finden sich genau wieder in den übrigen Parallelogrammen.

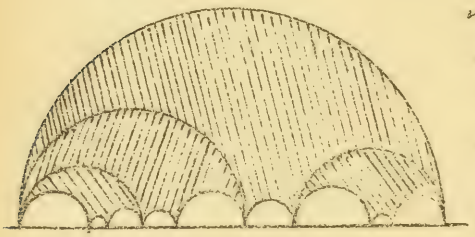
Unser Ergebnis ist daher dieses:

„Die Parallelteilung und die ihr zugehörige Formel $z' = z + m_1 w_1 + m_2 w_2$ kommen funktionentheoretisch zur Geltung in der Theorie der doppelt periodischen Funktionen."

Nun wollen wir dieselbe Betrachtung in Bezug auf die hyperbolische Geometrie durchführen. Wir denken uns dementsprechend, es sei die hyperbolische Ebene in eine unendliche Zahl kongruenter Polygone geteilt. Wählen wir etwa die Einteilung der Halbebene in Vierecke, wie sie von Dyck l. c. gegeben wird, wir müssen die Dyck'sche Figur natürlich noch einmal zwar um

unterwerfen, so haben wir uns zu denken, daß die ganze Halbebene von lauter solchen Vierecken, die im Sinne der hyperbolischen Geometrie kongruent sind, der Art überdeckt ist, daß jedes ungrenzende Halbkreis des einen Vierecks zugleich das benachbarte Viereck umschließt. So entsteht so eine mosaikartige Zerlegung der Ebene, unserem Auge wird es erscheinen, als würden die Vierecke kleiner und kleiner, je näher sie an den Rand gepreßt sind.

Fig. 71.



Wenn ich dann frage, durch welche analytische Substitution wird ein erstes Viereck, über welches die Variable z läuft, in ein anderes Viereck übergehen, über welches die Variable z' läuft, so geschieht dies eben durch eine Bewegung der hyperbolischen Ebene, die analytisch ausgedrückt ist durch $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, gerade so wie wir vorhin die Beziehung $z' = z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ aufgestellt hatten, um den Uebergang vom ersten Parallelogramm zu irgend einem anderen darzustellen. Da wir nun von einem ersten Viereck zu einem beliebigen anderen bei unendlich vielen Vierecken übergelangen können, so werden wir zweckmäßig zum Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Index i geben, wo i jeden Wert von

1 bis ∞ bezeichnen möge. Wir können dann zusammenfassend sagen:

„Der Uebergang von einem Punkte zu der Gesammtheit aller anderen wird analytisch durch eine unendliche Reihe solcher linearer Substitutionen vorgestellt werden: $z' = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, wo die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ reelle Zahlen von der Determinante $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$ sind.

Nun würde vielleicht jetzt erwartet, daß wir ein solches unendliches System der Substitutionen mitteilen, doch würde dies uns zu weit führen, da wir diese funktionentheoretischen Fragen hier augenblicklich nur anzudeuten beabsichtigten. Wir müssen uns daher damit begnügen zu wissen, daß es solche Substitutionssysteme in ausserordentlich großer Zahl giebt.

D. h. wenn wir dies voraussetzen, so bringt uns die Betrachtung unserer Figur und der zugehörigen Substitution auf den Gedanken:

Wird es möglich sein entsprechend dem, was wir bei den doppelt periodischen Funktionen gethan haben, solche eindeutige Funktionen $f(z)$ aufzustellen, daß dieselben im ganzen unserer Kreise genau denselben Verlauf nehmen, wie in all' den anderen, daß also $f\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = f(z)$ wird für jedes beliebige i?

Wir werden solche Funktionen mit o vielen reellen

Substitutionen in sich geradezu als eine Verallgemeinerung der doppelt periodischen Funktionen ansehen können. —

Damit haben wir diejenige Fragestellung, mit welcher Poincaré zuerst im Jahre 1881 in den Comptes Rendus begann, und welche jetzt, darf man wohl sagen, ziemlich im Mittelpunkt des neueren funktionentheoretischen Interesses steht. Diese Funktionen nennt Poincaré zu Ehren von Fuchs „Fonctions Fuchsiennes." Gegen diese Benennung zu Ehren eines anderen Mathematikers, der allerdings in angrenzenden Gebieten gearbeitet hat, habe ich einmal Widerspruch erheben zu müssen geglaubt und zwar in der Schlußbemerkung zu den Untersuchungen von Poincaré, die im 19. Bde. der Math. Annalen abgedruckt sind.

Wir hier in Göttingen, Herr Prof. Schwarz und ich, sind eben der Ansicht, solche Personalbezeichnungen, zumal wenn sie eine schiefe Ansicht von dem relativen Werte der Verdienste verschiedener Mathematiker geben können, doch lieber zu vermeiden. Ich habe bislang diese Funktionen als „eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich" bezeichnet. Ich bringe jetzt zwecks kürzerer Bezeichnung das Wort „automorphe Funktion" in Vorschlag, speciell „reell automorphe Funktionen", da die

Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell sind. Man könnte sich ja auch Funktionen denken, — und wir werden gleich noch hiervon sprechen. —, die unendlich viele linear gebrochene Substitutionen mit komplexen Parametern gestatten. *) Diese würden wir dann etwa „allgemein automorphe Funktionen" nennen.

Wir können dann die Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie in der Funktionentheorie kurz so charakterisieren:

Das geometrische Studium der hyperbolischen Ebene führt direct zur Theorie der reell automorphen Funktionen

Nun wollen wir noch versuchen, eine Erklärung zu geben, wie es sich mit der Raumgeometrie und den allgemein automorphen Funktionen verhält. Wir können an dieser Stelle natürlich nur in groben Zügen Andeutungen geben, ohne darauf Anspruch zu machen, volle Klarheit verschaffen zu wollen. Wir denken uns im Raume etwa eine Kugel, welche wir als absolutes Gebilde bei der Definition der hyperbolischen Maßbestimmung wählen. Das Innere dieser Kugel haben wir dann in kanten kongruente Polyeder zu zerlegen, die im Sinne der Cayley'schen Maßbestimmung

*) Das sind Poincaré's fonctions Kleinéennes".

kongruent sind und in ihrer Gesammtheit das Innere der Kugel gerade ausfüllen. Wenn man dann in der Kugel $x + iy = z$ setzt und die Bewegungen im Sinne Cayleys in Betracht zieht, bei denen unsere Polyeder unter einander vertauscht werden, während die Kugel dabei natürlich in sich selbst übergeht, so kommt man zu der Theorie der allgemein automorphen Functionen, in Beziehung auf welche die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der linear gebrochenen Substitution komplex sind.

Auf Grund dieser Betrachtungen können wir nun auch genau bezeichnen, womit wir im nächsten Semester in der Vorlesung uns beschäftigen werden. Es ist in der That seit langen Jahren mein Wunsch, die automorphen Functionen hier in Göttingen in gleicher Weise zur Geltung zu bringen, wie ich in den letzten Semestern die hyperelliptischen und Abelschen Funktionen behandelt habe. Für die Theorie der automorphen Funktionen die allgemeine Grundlage zu geben, eben das soll nun im nächsten Semester unsere Aufgabe sein, woran sich dann von selbst eine längere Reihe von Specialvorlesungen schließen wird.

Diese Grundlage nun gewinne ich, was die Fortsetzung dieser Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie angeht, in der Art, daß ich in dem besprochenen Sinne das allgemeine Problem der Ebenen- und Raumteilung

in kongruente Parcellen unterscheide. Wir werden
da also in analoger Weise in die Theorie der auto-
morphen Funktionen eindringen, wie wenn man
die Theorie der elliptischen Funktionen von der Paral-
lelteilung der Ebene ausgehend behandelt.

Nun führt aber zu der Theorie der elliptischen
oder doppeltperiodischen Funktionen doch noch ein
anderer Weg als durch die Gebietseinteilung der Ebene,
nämlich durch die elliptischen Integrale, von denen
jene die Umkehrfunktionen darstellen. Ja, wenn man
entscheiden sollte, welchem Wege als dem besseren
von beiden der Vorzug einzuräumen wäre, so würde
dies wohl nicht so leicht zu sagen sein. Doch ist es
auch gar nicht nötig, eine solche Entscheidung zu treffen;
vielmehr ist es unbedingt zu empfehlen, beide Methoden
neben einander zu behandeln. Dementsprechend aber
gibt es nun auch zu den automorphen Funktionen
noch einen anderen Eingang als von der Zerlegung der
hyperbolischen Ebene oder des hyperbolischen Raumes
aus, wenn man nämlich auch hier, wenn $f(z)$ eine
automorphe Funktion ist, umgekehrt z als eine
Funktion von f betrachtet. Es zeigt sich, daß dies
durch Vermittelung gewisser linearer Differential-
gleichungen zweiter Ordnung geschieht. So ergiebt
sich ein zweiter Eingang in die Theorie der auto-
morphen Funktionen, dies ist der Eingang von der

Theorie der Differentialgleichungen, speciell der linearen Differentialgleichungen aus. —

Es wird so auch verständlich sein, warum ich als Hauptvorlesung des nächsten Semesters die Theorie der Differentialgleichungen angekündigt habe: Ich beabsichtige da eben, nach einer Darlegung der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen bis zu den automorphen Funktionen vorzudringen. Beide Vorlesungen zusammen sollen dann die in Aussicht genommene „Grundlage" geben, auf der spätere Semester weiter zu arbeiten haben. —

Doch kehren wir nun nach diesem Excurs zu unseren Betrachtungen der zweiten Periode in der Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie zurück. Wir hatten bereits die Arbeiten von Riemann und Beltrami auf diesem Gebiete besprochen, wir gehen nun dazu über, von den Arbeiten von Helmholtz zu berichten. Wir wollen zunächst einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken. Helmholtz ist nicht Mathematiker von Beruf, er ist Physiker, Physiologe. Daher stehen uns bei ihm die Fragen, mit denen wir uns hier beschäftigen, unter einem allgemeineren Gesichtspunkte entgegen. So z. B. behandelt Helmholtz die ordentlich theoretische Frage, ob wir überhaupt berechtigt sind, derartige Betrachtungen, wie wir sie hier

angestellt haben, auf unseren wirklichen Raum zu übertragen, dann auch die physiologische Frage, wie das Sehen mit unseren beiden Augen zu Stande kommt, wie es sich gestalten müßte, wenn wir nicht die euklidische Geometrie in der Außenwelt vor uns haben u.s.w. Es sei an dieser Stelle einmal an den Vortrag von Helmholtz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome," der im Heft 3. der populär wissenschaftlichen Vorträge von Helmholtz (1876) abgedruckt ist. Es ist zu empfehlen von diesem Vortrag Kenntnis zu nehmen.

Mit dieser nicht mathematischen Eigenschaft von Helmholtz hängt es dann auch zusammen, daß er den mathematischen Teil seiner Betrachtungen nicht mit der Gründlichkeit behandelt und durcharbeitet, wie man es bei einem Mathematiker von Fach fordern wird. So findet sich daher diese oder jene mathematische Incorrektheit. So übersieht Helmholtz zu Anfang seiner Untersuchungen, als er mit der Literatur des Gegenstandes nur sehr unvollkommen vertraut war, z.B. die Möglichkeit der Annahme eines negativen Krümmungsmaßes in einer reellen Mannigfaltigkeit, er hat vielmehr herausbekommen (indem er unmittelbar an die beg. Hülfskugel dachte), daß negatives Krümmungsmaß nur bei imaginären Maßbestimmungen

gen

möglich sei. So steht er vor der Alternative: entweder Euklid oder positives Krümmungsmaass. Dies ist besonders deswegen interessant, weil ja früher, in der ersten Periode der Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie, die Frage gerade lautete: entweder Euklid oder negatives Krümmungsmaass. Übrigens hat Helmholtz, von Beltrami aufmerksam gemacht, seinen Irrthum ausdrücklich zugegeben und dies auch in einer Note zu seinen Schriften ausgesprochen. Einen anderen Punkt der Helmholtz'schen Theorie, der Bedenken erregt (die Forderung der sogen. Monodromie) werden wir unten besprechen.

Wir werden jetzt über die Schriften von Helmholtz des Näheren zu berichten haben und zwar über die beiden Aufsätze, die sich im II. Bde. seiner gesammelten Abhandlungen pag. 610 ff. finden. Der erste ist ein Vortrag, den Helmholtz im Jahre 1868 in Heidelberg in der Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte gehalten hat, derselbe ist zuerst in den Berichten dieser Gesellschaft vom gleichen Jahre veröffentlicht unter der Überschrift: „Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie." Der zweite Aufsatz ist eine weitere Ausführung dieses Vortrages, die zuerst 1868 in den

Göttinger Nachrichten erschienen ist. Er führt den Titel: „Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen"

Wir werden am besten uns darauf beschränken über das Neue in diesen Arbeiten im durchaus früher Weise zu referieren. — Riemann ging bekanntlich in seinem Vortrage davon aus, daß er als Definitionen die Bogenelemente aufstellte: $ds = \sqrt{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$. Bei unserer ersten Erwähnung dieser Formel bei Riemann haben wir einen Punkt jedoch nicht betont. Es soll nämlich der Ausdruck unter der Quadratwurzel ein definiter (und zwar in positiv definiter), nicht ein indefiniter sein. Was heißt es nun, ein Ausdruck ist definit resp. indefinit? Wir wollen einmal $n = 2$ setzen und den Ausdruck $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k$, in dem dann die Indices i und k die Werte 1, 2 haben, näher betrachten. Setzen wir diesen gleich 1 und betrachten x_1, x_2 als kartesische Coordinaten, so stellt die Gl. $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 1$ einen Kegelschnitt dar, der nulliteilig und einteilig sein kann. Wenn er einteilig ist, so wird vielleicht für die Punkte im Innern desselben der Ausdruck $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k > 0$, für die Punkte außerhalb des Kegelschnittes dagegen < 0 sein, oder auch umgekehrt. Es giebt jedenfalls also in der Ebene durch

den Kegelschnitt getrennte Gebiete, in deren einem der Ausdruck $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ stets positiv, im anderen stets negativ ist. (Fig. 72.). In diesem Falle nennen wir den Ausdruck $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ einen <u>indefiniten.</u>

Wenn aber der durch $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ dargestellte Kegelschnitt nullteilig ist, so folgt, daß in der ganzen Ebene unser Ausdruck stets ein und dasselbe Vorzeichen zeigt. Wir nennen daher den Ausdruck $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ einen definiten und zwar, je nachdem das in Rede stehende Vorzeichen desselben stets positiv oder stets negativ ist, <u>einen positiv resp. negativ definiten.</u>

Fig 72.)

Was wir so in geometrischer Weise von der Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ ausgesagt haben, gilt unverändert auch für den quadratischen Ausdruck $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$.

<u>„Derselbe heisst definit, wenn er für kein reelles Wertesystem dx verschwindet und also für alle reellen Wertsysteme dx gleichen Vorzeichen hat."</u>

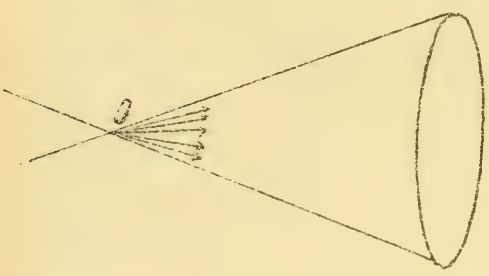
Man findet bei Riemann die Voraussetzung statt, daß $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ in der Formel des Bogenelementes ein positiv definiter Ausdruck sein soll. Es würde nämlich anderenfalls reelle Fortschreitungsrichtungen geben, für die ds Null oder imaginär

müde, was natürlich nicht der Fall sein soll.

Doch wir wollen uns einmal hineindenken, was es heisst für einen beliebigen in Betracht gezogenen Punkt einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung, wenn $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ein indefiniter Ausdruck ist. Da wir unsere Aufmerksamkeit auf die Umgebung nur eines einzelnen Punktes richten, so werden wir dabei die a_{ik} als konstant ansehen dürfen. Es giebt also dann reelle Fortschreitungsrichtungen von unserem Punkte aus, für welche der Ausdruck gleich 0 wird. Wenn wir uns nun fragen, was diese Fortschreitungsrichtungen für eine Gestalt bilden, so brauchen wir einfach nur die Gl. $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ zu interpretiren. Wir müssen in derselben die dx als Coordinaten der von unserem Punkte auslaufenden Fortschreitungsrichtungen gelten lassen, mit denen wir gerade so operiren, wie sonst etwa mit den Coordinaten x der von einem Punkte auslaufenden Strahlen, mithin so, dass wir nur die Anfangselemente solcher Strahlen in Betracht zu ziehen haben, während man in der projectiven Geometrie die Strahlen in ihrer ganzen Ausdehnung berücksichtigt. Nun wissen wir, in Strahlencoordinaten x stellt $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ einen Kegel zweiter Ordnung dar, der von dem Punkte aus sich erstreckt. Es umfasst daher $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ alle die Fortschrei-

tungsrichtungen, die durch die Anfangselemente der Strahlen dieses Kegels gegeben werden. Wenn es sich nun um einen indefiniten Ausdruck handelt, so ist der Kegel dieser Fortschreitungsrichtungen einteilig *) Die vom unserem Punkte auslaufenden

Fig. 8



Bogenelemente, die auf diesen reellen Kegel fallen, sind gleich 0; die Bogenelemente im Inneren des Kegels haben etwa eine reelle Länge, die ausserhalb eine imaginäre Länge oder umgekehrt. Wenn es nun möglich sein sollte, den mit indefinitem Bogenelement versehenen Raum ebenso zu bewegen, wie wir es vom gewöhnlichen Raum gewohnt sind, insbesondere ihn um einen festgehaltenen Punkt zu drehen, was werden wir dann bei einer Drehung um den Punkt 0 schließen können? Der einteilige Kegel $\sum a_{ik} dx_i dx_k = 0$ muß hierbei offenbar in sich selbst übergehen.

*) In besonderen Fällen könnte der indefinite Ausdruck natürlich auch ein Paar reeller oder imaginärer ebener Strahlbüschel vorstellen, die Ueberlegungen des Textes bleiben dabei in der Hauptsache ungeändert.

denn die Bogenelemente, die reell sind, können doch nicht in solche übergehen, die imaginär sind. Auch müssen Bogenelemente von der Länge Null immer wieder Bogenelemente von der Länge Null liefern. Wie werden sich nun in besonderen diese Drehungen um den Punkt O darstellen? Ist eine beliebige Fortschreitungsrichtung vom Punkte O aus gegeben durch das Verhältnis $dx_1 : dx_2 : dx_3$, so wird aus derselben bei der Drehung etwa die durch das Verhältnis $dx_1' : dx_2' : dx_3'$ bestimmte Fortschreitungsrichtung werden. Wir hängen nun die x zu den x' zusammen. Mögen ganz allgemein die x zu den x' bei einem jeden Bewegung in einer mittels analytischer Formeln ausgedrückten Beziehung stehen, die wir uns als durchaus differentiierbar denken. Wenn wir nun aber zu den Differentialen übergehen, so werden wir ohne Zweifel das Formelsystem erhalten:

$$dx_1' = \alpha_{11}\, dx_1 + \alpha_{12}\, dx_2 + \alpha_{13}\, dx_3,$$
$$dx_2' = \alpha_{21}\, dx_1 + \alpha_{22}\, dx_2 + \alpha_{23}\, dx_3,$$
$$dx_3' = \alpha_{31}\, dx_1 + \alpha_{32}\, dx_2 + \alpha_{33}\, dx_3.$$

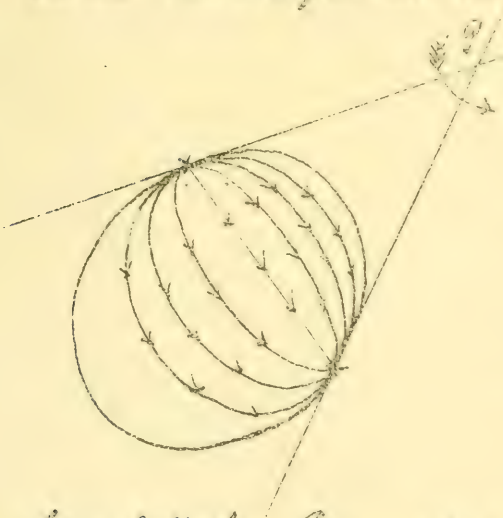
Dies hiermit aufgestellte Prinzip ist natürlich sehr richtig. Sein allein einzige Fehler drückt sich in Worten aus: Wenn man sich auf die Differentiale und ihre Transformationen einläßt, dann kommt man

den Drehungen entsprechend sicher auf lineare Substitutionen, d.h. auf Formeln, die ganz denen ähnlich sind, die wir in der projectiven Geometrie kennen, nur daß man dx schreibt wo sonst x steht."

Wir sehen jetzt auch sogleich, wie die Verhältnisse beschaffen sind in unserem Falle, wo $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ein indefiniter Ausdruck ist und wir eine Drehung um unseren Punkt O vornehmen. Wir haben die dx dann so zu transformieren, daß der einteilige Kegel $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ bei diesen linearen Substitutionen in sich selbst übergeht.*) Dies ist aber ganz die nämliche Aufgabe, die uns von der Bewegung der hyperbolischen Ebene her bekannt ist. Dieselbe ist jetzt nur von der Ebene auf ein Strahlenbündel übertragen. Denn ob wir statt $dx_i : dx_k$ einsetzen $x_i : x_k$ und dann die vollständigen Strahlen in Betracht ziehen, die durch O laufen, oder ob wir nur die Anfangselemente derselben berücksichtigen, indem wir $dx_i : dx_k$ beibehalten, ist für die jetzt in Betracht kommenden Schlüsse ganz gleich. Wir wollen nun

*) Dies ist natürlich genau so, wenn $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ definit ist und also $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ einen nulteiligen Kegel vorstellt; nur hat es keinen Zweck, im Texte die betreffenden Verhältnisse weiter zu verfolgen.

diese Verhältnisse nach einer Seite hin weiter verfolgen. Wir hatten drei Arten von Drehungen in der hyperbolischen Ebene betrachtet. Bei den Drehungen erster Art lag der feste Drehpunkt im Innern des Kegelschnittes, bei den Drehungen zweiter Art auf dem Kegelschnitt, bei den Drehungen dritter Art ausserhalb des Kegelschnittes. Nur die Drehungen erster Art führen nach Durchlaufung einer endlichen Strecke zur Anfangslage zurück. Im zweiten und dritten Fall dagegen ist die Drehung aperiodisch. Es sei durch die Figur für die Verhältnisse im dritten Fall erinnert, mit dem



Punkte P ist auch die Polare desselben fest, die Tangenten von P aus an den Kegelschnitt bilden mit jedem anderen Strahl durch P so grosse Winkel, wodurch die Aperiodicität der Drehung um P bedingt ist.

Ähnlich wie in der hyperbolischen Ebene liegt die Sache übrigens auch in der parabolischen Ebene. Auch hier sind die Drehungen aperiodisch, sobald der Drehungspunkt nicht mehr im Endlichen liegt.

Dies werden wir nun auf den Kegel übertragen; wir können dann sagen:

Wenn das Bogenelement durch eine indefinite quadratische Form gegeben wird, dann wird es Krümmungen um einen beliebigen Punkt geben, welche nicht nach einer endlichen Weglänge zur Anfangslage zurückführen.*)

Man wird daher die Forderung eines definiten quadratischen Ausdruckes für das Quadrat des Bogenelementes noch dahin präzisieren können:

Es soll jede Krümmung nach einer endlichen Weglänge in die ursprüngliche Lage zurückführen.

Jetzt haben wir alle Praemissen, um die Helmholtz'schen Schriften zu verstehen und zu kritisieren. (Es ist nämlich, wie wir schon andeuteten, eine unrichtige Behauptung in denselben ausgesprochen, die wir zu berichtigen haben.) Wir gehen nun auf die Aufsätze selbst ein:

*) Wir haben im Texte so argumentiert, als stelle $\sum_{ik} dx_i dx_k$, wenn indefinit, = 0 gesetzt durchaus einen einteiligen eigentlichen Kegel zweiter Ordnung dar. Es kann sich aber auch um ein Paar reeller oder imaginärer Strahlbüschel oder um ein doppelt zählendes Büschel handeln. In allen Fällen bleibt das Resultat des Textes bestehen, wie wir hier nicht ausführlich nachweisen.

Helmholtz zeigt nicht die Annahme eines bestimmten Ausdruckes für das Bogenelement voraus, sondern er sucht vielmehr die hierauf bezügliche von Riemann gemachte Annahme zu begründen. In diesem Sinne geht er einen Schritt weiter als Riemann. Die Thatsache, auf der er fusst, ist die, dass es ∞^6 Bewegungen im unserem Raume giebt, bei denen die starren Körper ihre geometrischen Eigenschaften behaupten. Diese Bewegungen sagt er, werden sich jedenfalls so analytisch ausdrücken, dass die neuen Coordinaten x' der Punkte mit den ursprünglichen durch 3 bestimmte Gleichungen zusammenhängen:

$$x_1' = \varphi(x_1\, x_2\, x_3\,;\, a_1 \ldots\ldots a_6)$$
$$x_2' = \psi(x_1\, x_2\, x_3\,;\, a_1 \ldots\ldots a_6)$$
$$x_3' = \chi(x_1\, x_2\, x_3\,;\, a_1 \ldots\ldots a_6)$$ wo $a_1 \ldots\ldots a_6$

beliebige Parameter sind, entsprechend den 6fach ∞ vielen möglichen Bewegungen. Von diesen 6fach ∞ vielen Bewegungen nun, die als ebensoviele Transformationen der Variabeln $x_1\, x_2\, x_3$ erscheinen, müssen wir jedenfalls noch eine Eigenschaft verlangen, dass nämlich, wenn den Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$; $y_1\, y_2\, y_3$ irgend zweier Punkte sich eine bestimmte Grösse, die Entfernung derselben, berechnen lässt, sie bei sämmtlichen möglichen Bewegungen ungeändert bleibt. Es giebt also eine Funktion:

$\varepsilon = f(x_1 x_2 x_3 ; y_1 y_2 y_3)$, die ungeändert bleibt, wenn ich die x sowie die y den oben aufgestellten Transformationen gleichzeitig unterwerfe.*)

Nun stellt sich Helmholtz die Aufgabe: alle 6 fach ∞ vielen Aggregate von Transformationen dreier Variabeler zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, eine solche unveränderliche Größe ε zuzulassen. Wir wollen sofort das Theorem aufstellen, zu dem wir gelangen. Sei es uns gestattet hierbei das Wort „Gruppe" einzuführen zur Bezeichnung für die 6 fach unendliche Mannigfaltigkeit der Bewegungen.

Wir werden dann sagen:

„Wenn eine 6 fach unendliche Gruppe von Transformationen im Gebiet von 3 Dimensionen vorliegt, welche die Eigenschaft hat, eine bestimmte Funktion zweier Punkte x und y unverändert zu laßen, und es hat ferner diese Gruppe von Bewegungen die Eigenschaft, daß jede einzelne ihr angehörige unendlich kleine Transformation, die einen Punkt fest läßt (die also geometrisch eine Drehung um diesen Punkt vorstellt) nach einer endlichen Weglänge zur Anfangslage zurückführt, dann ist die Funktion ε für 2∞ benachbarte Punkte durch die Quadratwurzel aus einem definiten Ausdruck $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ gegeben."

*) Für die Coordinaten y lauten die entsprechenden Formeln dann: $y_1' = \varphi(y_1 y_2 y_3 ; \alpha_1 \cdots \alpha_6)$; $y_2' = \psi(y_1 y_2 y_3 ; \alpha_1 \cdots \alpha_6)$; $y_3' = \chi(y_1 y_2 y_3 ; \alpha_1 \cdots \alpha_6)$.

Hiermit hätten wir dann den Riemann'schen Ausgangspunkt. Dieser Satz wäre also das eigentliche Resultat der Helmholtz'schen Arbeit. Nun wollen wir sehen, wie Helmholtz die Tatsache herleitet. Wir werden übrigens nur im Großen und Ganzen die Betrachtungen von Helmholtz wiedergeben und zwar, wie wir schon sagten, in freier Weise.

Wir betrachten einmal die Funktion F für zwei Nachbarpunkte, von denen wir dann einen als fest annehmen.

Es wird dann:
$F(x, x+dx) = F(dx_1, dx_2, dx_3)$ d. h. gleich einem homogenen Ausdruck in den dx_1, dx_2, dx_3 werden. Denken wir uns den Punkt x fest, so wird diese Funktion F offenbar nur von dx_1, dx_2, dx_3 abhängen, also ein Differentialausdruck mit constanten Coefficienten sein. Diese Funktion soll nun bei all' den Bewegungen unserer Gruppe unverändert sein, die den Punkt x festlassen. Nun gibt es allgemein ∞^6 viele Bewegungen. Halten wir aber einen Punkt x fest, so wird es immer noch ∞^3 Bewegungen geben. Gibt, setzen wir nun $F(dx_1, dx_2, dx_3) = 0$, so stellt diese Gl. einen gewissen Kegel von Fortschreitungsrichtungen dar, der sich von unserem festen Punkte aus in den Raum erstreckt, und dieser Kegel muß dann bei dem ∞^3 vielen möglichen

Bewegungen in sich übergehen. Wie nun aber auch analytisch diese möglichen Bewegungen als Beziehungen der neuen x' mit den alten x ausgedrückt sein mögen, jedenfalls werden wir wie bereits gesagt, wenn wir zu den Differentialen übergehen, die Gleichung aufstellen dürfen:

$$dx_1' = k_{11}\, dx_1 + k_{12}\, dx_2 + k_{13}\, dx_3 ,$$
$$dx_2' = k_{21}\, dx_1 + k_{22}\, dx_2 + k_{23}\, dx_3 ,$$
$$dx_3' = k_{31}\, dx_1 + k_{32}\, dx_2 + k_{33}\, dx_3 ,$$ wobei

natürlich die Größen k noch von den 3 willkürlichen Parametern abhängen, damit eben dreifach unendlich viele Bewegungen sich ergeben.

Zusammenfassend werden wir dann sagen:

„Für die Fortschreitungsrichtungen dx stellen sich die dreifach ∞ vielen Bewegungen als ebensoviele lineare Substitutionen dar, und unser Kegel $F(dx_1, dx_2, dx_3) = 0$ muß also die Eigenschaft haben, durch dreifach unendlich viele lineare Substitutionen in sich überzugehen."

Dadurch ist nun unsere weitere Betrachtung zu einer Frage der projektiven Geometrie geworden.

Denn:

„Indem wir jetzt die $dx_1\, dx_2\, dx_3$ durch gewöhnliche trimetrische Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ einen Augenblick ersetzt denken, haben wir die Aufgabe vor uns, alle Curven $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ in der Ebene zu bestimmen, welche durch dreifach ∞ viele Collineationen in sich

übergehen, und die projektive Geometrie zeigt *), daß dies nur die Kegelschnitte bezw. ihre Ausartungen sind."

Jetzt wissen wir aber, daß $\Phi^{-1} = 0$ keine reellen Elemente enthalten darf, denn sonst würde es Drehungen in unserem Raume geben, die nicht nach endlicher Fortlänge auf die Anfangslage zurückführen. Es sind dies, allgemein zu reden, **) die Drehungen, die auf ein solches reelles Element hinführen, (vergl. Fig. 73). Also handelt es sich bei $\Phi^{-1} = 0$ um einen soliden Kegel bezw. eine solche Ausartung eines Kegels, welche kein reelles Element enthält. Dies aber ist notwendig ein eigentlicher, nulldeutiger Kegel. Es muß sodann $\Phi^{-1} = 0$ dasselbe sein, wie $\sum a_{ik} dx_i dx_k = 0$, unter welchem Zeichen einen definiten Ausdruck verstanden. Da nun endlich noch die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte doch offenbar von derselben Ordnung unendlich klein ist, wie die Inkremente dx der Coordinaten, so muß für F schließlich gesetzt werden: $\sqrt{\sum a_{ik} dx_i dx_k}$. Wir haben so die Formel $ds = \sqrt{\sum a_{ik} dx_i dx_k}$ abgeleitet, welche Riemann zum

*) Wir drücken uns hier im Texte etwas ungenau aus. in der That müßten wir längere Erläuterungen geben, um alle Möglichkeiten genau zu besprechen.

**) d.h. auch in den Fällen, wo der betr. Kegel in ein Paar reeller oder imaginärer ebener Büschel ausgeartet sein sollte.

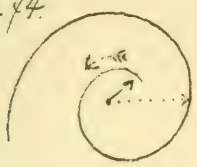
Ausgangspunkt seiner Betrachtung gemacht hat.
Wir haben uns dabei freilich auf den Fall von 3 Dimensionen beschränkt. Aber das ist nur im Interesse der bequemeren Darstellungsweise geschehen. Die Betrachtungen lassen sich ohne nennenswerte Schwierigkeit auf n Dimensionen übertragen.

Wir haben dem Referat über Helmholtz' Arbeiten nur noch einen kleinen Punkt hinzuzufügen. Es bezieht sich auf die Erörterung der Möglichkeiten, die denkbar sind, wenn man die Forderung fallen läßt, daß jede Drehung um eine Axe nach einer endlichen Weglänge zur ursprünglichen Anfangslage zurückführt. Wir hatten uns diesen Fall bereits durch die Figur in der hyperbolischen Ebene klar gemacht. (s. Fig. 73.) Auch Helmholtz gibt dieses Bild; doch führt er noch eine zweite Möglichkeit an, in der er jedoch sicher sich geirrt hat. Er denkt sich nämlich, daß möglicherweise nach einer einmaligen Umdrehung die Anfangsrichtungen zwar dieselben sind, wie vorher, daß aber die Endpunkte der Bogenelemente, die von dem festen Drehpunkt ausgehen, nicht wieder mit den ursprünglichen zusammenfallen, sondern daß dieselben etwa eine Art Spirallinie beschreiben. Er spricht er hierbei die Idee aus, der Raum möge nicht monodrom sein, d.h. die Abstände von der Drehungsaxe möchten bei einer vollen Umdrehung um die Drehungsaxe

möglicherweise mit einer von 1 verschiedenen Konstanten multiplicirt werden. *)

Nach den Untersuchungen von Lie aber in den Leipziger Berichten 1886 ist diese Befürchtung gegenstandslos. Die Bedeutung der hiermit besprochenen Helmholtz'schen Arbeiten beruht aber keineswegs nur in den mathematischen Betrachtungen und Resultaten, sondern darin, daß dieselben weit mehr von einem größeren Publikum gelesen wurden, als jede andere Schrift auf diesem Gebiet. So knüpft denn auch die populäre Discussion im Kreise der Nicht-Mathematiker, der philosophischen Forscher der Lehrer, die für Elementargeometrie Sinn und Interesse haben, ohne doch gelernte Mathematiker zu sein, fast ausschließlich an die Arbeiten von Helmholtz an. Wir wollen bei dieser Gelegenheit die genannten Gelehrten doch in 4 Gruppen teilen:

Fig. 74.



1. Die ersten sind diejenigen, die streng auf dem Kantischen Standpunkt beharren. Wir können sie die Orthodoxen nennen. Unter diesen ragt z. B. Dühring in Berlin hervor, auch auf anderen Gebieten einer der erbittersten Gegner von Helmholtz. Während Letzterer dafür eintritt, daß die Axiome der Geometrie wesentlich

*) Diese Helmholtz'sche Ausdrucksweise ist der Funktionentheorie entnommen.

unter der Mitwirkung der Erfahrungen aufgestellt sind, sagt Düring: Das ganze System der nicht euklidischen Geometrie zeigt eine höchst verderbliche Auffassung; es handelt sich dabei um eine Untergrabung aller Geometrie; für den richtig denkenden Mathematiker steht es von vornherein fest, dass man durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser nur eine einzige Parallele ziehen kann. Die Zahl der Forscher, die diesen Ansichten huldigen, ist gar nicht gering. Es sind vor allem solche Männer, die sich im frühen Alter an die Anschauungen der Euklidischen Geometrie ausschliesslich gewöhnt haben, und nun im späteren Alter nicht mehr Elasticität genug besitzen, um sich in die neuen Ideen der nicht-euklidischen Geometrie hineinzudenken. Diese wissen dann genau, dass die ganze Theorie Unsinn ist, ohne sie darum notwendigerweise überhaupt des Näheren zu kennen. *)

2.) Die zweite Klasse bilden <u>die Skeptiker</u>. Diese glauben von Grund ihres Herzens aus nicht an die nicht-euklidische Geometrie. Sie können es sich nicht vorstellen, dass man in eine Massgeometrie sich hineindenken könne, die so sehr von der gewöhnlichen Anschauungsweise verschiedene Resultate aufstellt und doch der

---

* Übrigens bekennen sich auch hervorragende Mathematiker zu derselben Ansicht, auch Cayley ist geneigt, streng an den Euklidischen Axiomen festzuhalten.

gewöhnlichen geometrischen Anschauung, was kleinere Teile des Raumes angeht, durchaus Rechnung trägt. Sie können aber auch die Gründe nicht entkräften, welche gegen die bisherigen Beweise des Parallelenaxioms sprechen, sie suchen daher immer nach neuen Beweisen. Dies ist wohl grösstenteils die Ansicht der Gymnasiallehrer. Ich will erwähnen Berg aus Plauen, der eine Reihe von kleineren Abhandlungen hierüber geschrieben hat, die nicht ohne Interesse sind (in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik). Bei einer Unterredung mit ihm (1881) gelang es mir nicht, seine Aufmerksamkeit auf das Cayley'sche Abbild der Nicht-Euklidischen Geometrie zu concentrieren; er wollte und konnte sich nicht an eine derartige vergleichende Betrachtung begnemen.

3. Drittens sind zu nennen die Rezeptiven. Dieselben suchen ihre Aufgabe darin, die Helmholtz'schen Schriften ausführlicher darzulegen, zu commentieren. Von diesen Männern giebt es unter den jüngeren Philosophen eine ganze Reihe. Es sei z. B. erinnert an Erdmann, (früher in Breslau, jetzt in Halle), der über die Axiome der Geometrie 1876 ein Buch geschrieben hat, worin er den Helmholtz'schen Standpunkt ausführlich auseinanderlegt und mit Kant und anderen vergleicht.

4. Doch fehlt es auch nicht an den Enthusiasten,

welche die Frage nicht so aufwerfen, wie wir es gethan haben, indem wir sagten, unserer Vorstellung wie unserer Erfahrung vom Raume wird mit der genügenden Genauigkeit ebensowohl durch die hyperbolische oder elliptische wie durch die parabolische Maassbestimmung entsprochen, wir entscheiden uns aber für die parabolische Hypothese, weil sie die einfachste ist, (wie man in der Physik auch unter gleichberechtigten Hypothesen immer die einfachste gelten läßt.) Vielmehr entscheiden sich diese Enthusiasten aus anderen Gründen. Hierher gehört Clifford und Zöllner (letzterer auch sonst ein Gegner von Helmholtz). Diese sprechen sich beide für die elliptische Geometrie aus, jeder aus besonderem Grunde. Zöllner, der metaphysische Neigungen hat, spricht die elliptische Geometrie an, weil die Ausdehnung des Raumes ins Unendliche hierbei umgangen wird, die man sich doch nicht vorstellen könne. Daher ist es richtig, die elliptische Geometrie, bei der der Raum in sich selbst zurückläuft, als die einzig mögliche anzusehen. Clifford als ein in der Schule der projektiven Geometrie gewachsener Mathematiker stellt gewisse ästhetische Principien voran. Er sagt: es giebt doch kein schöneres Gesetz als das der Dualität. Dies wird jedoch in der euklidischen Geometrie verletzt, indem die Maassverhältnisse im

Punkte denen der Strahlen, den Winkeln, nicht entsprechen. Aber auch in der hyperbolischen Geometrie herrscht das Gesetz der Dualität nicht, (sofern wir nicht etwa durchweg complexe Elemente in die Betrachtung aufnehmen wollen.) Während in ihr z. B. alle Punkte einen gewissen reellen Abstand von einander haben (natürlich beschränken wir uns auf das Innere des fundamentalen Kegelschnitts), kommen wir ja Linien finden, deren Winkelabstand 0 oder imaginär ist u. s. w.

Wenn wir aber einen nullteiligen Kegelschnitt als fundamentales Gebilde annehmen, also die elliptische Geometrie ins Auge fassen, dann gelten alle Sätze in dualistischer Weise genau so mit den Punkten wie mit den geraden Linien. Deswegen verdient die elliptische Geometrie den Vorzug.

Wir sehen, wie diese verschiedenen Betrachtungsweisen und Anschauungen sich in buntester Abwechselung neben einander stellen. Eins aber wollen wir noch betonen: Clifford allein von den angeführten Männern kannte Nicht-Euklidische Geometrie von Grund aus, die anderen vier haben zwar davon reden hören und glauben daher die Berechtigung zu haben, mitreden zu dürfen, das eigentliche innere Wesen und die [illegible] Behandlung der Nicht-Euklidischen Geometrie sind ihnen unbekannt geblieben.

meinen Zuhörern keine besondere Ansicht als verpflichtend vor. Aber ich will auf das Dringendste empfehlen, vorerst gründlich zu studieren, um was es sich handelt, und dann erst ein eigenes Urteil zu geben.

Wir kommen jetzt in unserem Referat zu der dritten Periode, die durch das Hinzutreten der projektiven Geometrie bedingt ist. Ich hatte bisher ja immer Gelegenheit zu bemerken, daß die früheren Forscher die Abhandlung Bayley's nicht kannten. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit darauf lenken, wie dies geschehen konnte. Es hängt dies mit dem allgemeinen Gange der Entwickelung unserer Wissenschaft zusammen. Nämlich nun kann sagen bis etwa zum Jahre 1870 zieht sich durch das ganze 19. Jahrhundert eine Zweiteilung der geometrischen Wissenschaft. Chasles steht an der Spitze der doppelten Wege der Forschung, aber seine Schüler und Nachfolger haben verschiedene Richtungen eingeschlagen und sind etwa 60 Jahre getrennt nebeneinander hergegangen. Etwas ungenau kann man die eine Richtung der Geometrie „die Geometrie des Maasses", die andere „die projektive Geometrie oder die Geometrie der Lage" nennen. Die Forscher, die sich mit der einen Theorie beschäftigten, hatten auf die Forscher der anderen Gebietes wenig oder gar keinen Einfluß und umgekehrt. In der That sind auch die Probleme, mit denen man sich beschäftigte,

verschiedenartig gewesen. Die Probleme, die in der Geometrie des Maasses hauptsächlich Gegenstand der Betrachtung waren, begreifen sich unter Anwendung der Differential- und Integralrechnung (Flächenkrümmung, u. s. w.) Unter den Männern, die sich damit beschäftigten, finden sich die besten Namen: Gauss selbst und alle die Vielen, die wir in den letztvergangenen Stunden genannt haben. Auf der anderen Seite, in der Geometrie der Lage, hat man die allgemeine Theorie der Verwandtschaft der Figuren und namentlich die algebraischen Curven und Flächen behandelt. Es ist hier gleichfalls eine lange Reihe der Forscher zu nennen, von Poncelet her, der an der Spitze steht, wir haben eine große Zahl derselben vor Weihnachten schon namhaft gemacht.

Man kann auch fragen, welche Interessentenkreise hier und dort vorhanden sein mögen, d. h. in welchen Anwendungen hier und dort die verschiedenen Zweige geometrischer Forschung zur Geltung gekommen sind. Wir können sagen: in allen den Gebieten, in welchen es auf genaue Messungen ankommt, wird der Geometrie des Maasses der Vorzug gegeben sein, so besonders in der Astronomie, Geodäsie, mathematischen Physik. Überall da aber, wo man zu zeichnen hat, ist die Geometrie der Lage wichtig gewesen. Hierher gehören die darstellenden Künste im allgemeinen Sinne, besonders darstellende Geometrie, auch die Lehre von der Reliefperspektive

wäre hier zu nennen). Ferner ist von den Ingenieuren auf Grund der projektiven Geometrie noch eine ganz besondere Disciplin geschaffen. Es ist dies die „graphische Statik", eine Ausbildungsweise der Betrachtungen der Statik, bei denen man nicht rechnet, sondern zeichnet. Es giebt gewisse Aufgaben der Statik, bei denen sich die Zeichnung der rechnerischen Behandlung überlegen zeigt. Hierher gehört z. B. die Lehre von der Konstruktion der Brücken, Dachstühle u. s. w. Jeder Stab, aus denen die Brücke gebaut ist, muß einzeln betrachtet werden, eine große Anzahl solcher Stäbe befindet sich neben einander, es gilt ihre räumliche Verknüpfung immer vor Augen zu halten. Hier kommt man dann viel schneller zum Ziel, wenn man Zeichnungen anfertigt, als wenn man lange Rechnungen anstellt. Es sei an dieser Stelle an ein Wort Eiffels erinnert, das kürzlich durch die Zeitungen verbreitet war: er würde seinen Turm niemals haben konstruieren können, wenn er nicht in Zürich graphische Statik gelernt habe. Das bahnbrechende Werk über „graphische Statik" ist von Culmann in Zürich seiner Zeit verfasst worden. (1864.)

Unabhängig von dieser Verschiedenheit der Interessenkreise hat sich übrigens, kann man sagen, auch die mathematische Denkweise selbst in den 2 unterschiedenen Teilen der Geometrie nach verschiedenen Richtungen entwickelt. Zweierlei nämlich kommt bei dem schaffenden

Mathematiker in Betracht: Einmal die Phantasie, die Leichtigkeit, mit der er neue Ideen schafft und gestaltet, dann die Kritik, die Schärfe der Beweise, mit der er seine Untersuchungen führt. Das Ideal ist natürlich, daß beide Fähigkeiten gleich ausgebildet sind. Und dies gerade ist bei Gauss zu bewundern, daß er in der Jugend mit ausserordentlicher schöpferischer Phantasie begabt die Probleme zu erfassen wußte, um sie später mit aller Schärfe einer gereiften Kritik durchgearbeitet darzustellen. Diese Kritik nun, welche die Einzelheiten in Betracht zieht, ist wesentlich in der Geometrie des Maasses, die Phantasie dagegen, die alles Zufällige von den Figuren abzustreifen sucht und allgemeinere Gesichtspunkte aufzustellen sucht, ist besonders in der Geometrie der Lage zur Bethätigung gekommen. Dieses gilt natürlich nur im Großen und Ganzen. So z. B. hat v. Staudt, dem die projektive Geometrie ihre systematische Ausbildung verdankt, seine Stärke in der Kritik, während man andererseits Riemann, dessen Untersuchungen, wo sie geometrisch sind, zum größten Teil der Geometrie des Maaßes angehören, gewiß nicht Gabe der Phantasie wird absprechen wollen. Die Wirkung dieser verschiedenen Behandlungsweisen war es denn auch, daß in der projektiven Geometrie manches Falsche behauptet wurde, was später abgestreift wurde, dagegen in der Geometrie des Maasses stellenweise eine gewisse Gedankenarmut nicht zu

verkennen ist. — Es war die allgemeine Basis gewonnen durch Untersuchungen, die sich etwa bis zum Jahre 1870 gebildet hatte. Seitdem trat bei der Mehrzahl der jüngeren Forscher die Tendenz hervor, beide Gebiete zu kennen, beide zu beherrschen und gerade aus der Verbindung derselben sich die Hülfsmittel zu neuen Ideen zu schaffen. Es hängt dies Streben übrigens mit der allgemeinen Entwicklung der Wissenschaften zusammen. Es war nicht allein auf Mathematik beschränkt. Vor 1870 war allgemein die Tendenz wesentlich auf Specialstudien gerichtet gewesen, man glaubte nur durch ausschließliche Concentration etwas leisten zu können. Man bedachte nicht, daß eine ausschließliche Beschäftigung mit Einzeluntersuchungen leicht eine vollständige Sterilität zur Folge haben kann. In der That geht auf jene Zeit die Definition zurück: die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, bei der sich keine 2 Fachvertreter verstehen können. Jetzt also trat ein Umschwung ein. Es erschien wieder als wünschenswerth sich einen Gesammtüberblick über den Stand der Wissenschaft zu verschaffen, wenn schließlich ja auch jeder Einzelne nur an einem einzelnen Problem wird weiter arbeiten können.

Darf ich jetzt über meine eigenen Arbeiten referieren, so weit sie nicht-euklidische Geometrie betreffen. Ich will zunächst die Titel derselben angeben. Es sind

dies die beiden Abhandlungen. *)

„Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie I, II."
1871, 72. Math. Annalen. 4, 6.

Hieran reiht sich insbesondere noch ein Programm aus dem Jahre 1872 **)

„Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen."

Einige kleinere Schriften werden wir zwischendurch noch zu erwähnen haben.

Mein Ausgangspunkt ist selbstverständlich der gewesen, der nun dieser Vorlesung zu Grunde liegt, nämlich an Cayley's Abhandlung anzuknüpfen und zu zeigen, daß die Cayleysche Maassbestimmung gerade zu übereinstimmt mit der nicht-euklidischen Geometrie, wie sie von Lobatscheffsky und Bolyai Riemann und Beltrami ausgebildet wurde. Die Formeln der Cayley'schen Maassbestimmung mußten zu dem Zwecke ein wenig erweitert werden. Bei Cayley wird nämlich die Entfernung zweier Punkte direkt definiert als der arc. cos. oder arc. sin. eines bestimmten Ausdruckes, während wir dieselben definieren als $\frac{1}{k}$ arc. cos. und $\frac{1}{k}$ arc. sin. desselben Ausdruckes, unter k eine beliebige Konstante verstanden. Diese Konstante k, die ja in gegenwärtiger

*) Eine vorläufige Note in den Göttinger Nachrichten vom August 1871.

**) Antrittsprogramm, Erlangen.

Vorlesung immer zur Geltung gekommen ist, musste also in den Cayleyschen Formeln hinzugefügt werden, um die Formeln der nicht-euklidischen Geometrie zu erhalten. Denn ohne dieses k hätte man ja überhaupt keinen wechselnden Wert des Krümmungsmaasses ($= \frac{1}{4k^2}$) !)

Insbesondere will ich noch bemerken, daß ich damals die Bezeichnungen „elliptische, parabolische, hyperbolische" Maassbestimmung in Vorschlag gebracht habe, die wir bisher benutzten. —

Als nun die Uebereinstimmung von Cayley's Maassgeometrie mit der nicht-euklidischen Geometrie konstatiert war*), galt es „Folgerungen" aus ihr zu ziehen. Auf diese Folgerungen möchte ich das Hauptgewicht legen, wenn dieselben auch erst in der zweiten Abhandlung ausführlich entwickelt wurden, als ich bemerkte, daß dieselben anderen Mathematikern nicht so selbstverständlich schienen, wie mir selbst. Ich werde dieselben einzeln besprechen, um hernach an die einzelnen Punkte wieder einen Litteraturbericht anzuknüpfen.

a.) Der erste Punkt ist die bereits erwähnte Abweichung von Beltrami, den Unterschied zwischen elliptischer und sphärischer Geometrie, d. h. zwischen der elliptischen

*) Auch Beltrami und Fiedler hatten diese Uebereinstimmung bemerkt, wie sie mir später schriftlich mitteilten.

Geometrie der Ebene und der gewöhnlichen Geometrie auf der Kugel.**) Beltrami hatte behauptet, daß bei positivem Krümmungsmaaß 2 geodätische Linien sich immer in 2 Punkten schneiden müßten, daß also nicht immer durch 2 Punkte zugleich die sie enthaltende geodätische Linie bestimmt ist. Wir sahen, daß dies eben nur bei der sphärischen Geometrie der Fall ist. Wie standen Riemann und Helmholtz zu dieser Frage? Wahrscheinlich haben sie derselben Anschauung sich hingegeben wie Beltrami, doch sind die Andeutungen hierüber zu kurz, daß dies sich mit Sicherheit nicht entscheiden läßt.

b.) Die zweite Folgerung ist der Aufbau eines neuen Systems der reinen Geometrie, das davon ausgeht noch vor Stellungnahme zum Parallelenaxiom zunächst die projektive Geometrie zu begründen und die Discussion der Parallelenfrage erst anzuschließen, wenn die allgemeine Lehre von der Cayley'schen Maassbestimmung entwickelt ist. Es hat dies selbstverständlich im Anschluß an die v. Staudt'schen Untersuchungen zu geschehen. Wir wollen ausdrücklich darauf hinweisen: v. Staudt setzt natürlich das Parallelenaxiom voraus, indem er durchaus in dem gewöhnlichen Raum operiert. Der charakteristische

**) cf. Ann. IV. p. 604 (Note), II. p. 125.

Ausgangspunkt in meiner Abhandlung ist daher der, dass überhaupt nur Konstruktionen in einem begrenzten Raumteil ausgeführt werden, den man vollständig überblicken kann. Von den Eigenschaften der Ebenen und geraden Linien kommen dann wesentlich nur in Betracht, dass durch drei beliebig angenommene Punkte eine und nur eine Ebene geht und dass durch 2 Punkte ein Ebenenbüschel geht, dessen Ebenen alle dieselbe Durchschnittsgerade besitzen. Ist dem so, dann wird man alle rein projektiven Sätze sofort auf jedes System von Flächen und Curven übertragen können, welches schlechthin ausgesprochen „dieselben Lagenbeziehungen" in einem gegebenen begrenzten Raum besitzt. Die so für das Innere eines begrenzten Raumes in grosser Allgemeinheit als geltend erwiesenen projektiven Beziehungen wird man dann durch Erweiterung der Grenzen so weit ausdehnen können, als man überhaupt will. Darauf wird erst man sich den uns von anderer Seite gegebenen Bewegungen des Raumes als einer speziellen Art der Collineationen zuwenden, nachdem man sich vorher mit Cayley's Maassgeometrie vertraut gemacht hat. (Näheres ist nachzulesen in den Annalen Bd. IV. p. 623 und Bd. VI. p. 132 ff.).

An diesen Aufbau der projektiven Geometrie knüpft sich eine beiläufige Discussion über den sogenannten Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, den wir vor Weihnachten besprochen haben und auf den wir

hier gleichfalls zurückkommen müssen, wenn dies auch eigentlich mit der nicht-euklidischen Fragestellung nichts zu thun hat. Der bekr. Fundamentalsatz besagt:

Wir werden 2 gerade Linien dann auf einander projektiv bezogen nennen dürfen, wenn 4 harmonischen Punkten hier allemal 4 harmonische Punkte dort entsprechen.

Wir haben seiner Zeit auch einen genauen Beweis hierfür kennen gelernt, der Beweis, den v. Staudt gab, erschien uns unvollständig. Auf diese Unvollständigkeit wird oben in Bd. II p. 132 (Note) aufmerksam gemacht, und die sich daran anschließende Discussion zieht sich durch verschiedene Annalenbände hindurch. An derselben habe ich selbst teil genommen in den beiden Publikationen:

Annalen III, (1871): „Nachtrag zu dem zweiten Aufsatz der nicht-euklidischen Geometrie" und

Annalen VIII, (1880): „Ueber die geometrische Definition der Projektivität auf den Grundgebilden erster Stufe." *)

Diese ganze Betrachtung aber betrifft, wie wir schon sagten, nur einen Incidenzpunkt, es handelt sich dabei nicht eigentlich um das Wesen der nicht-euklidischen Geometrie. c.) Diesem so aufgebauten System der reinen Geometrie können wir entgegenstellen ein entsprechendes System der

*) Hier ist denn auch im Anschlusse an eine Bemerkung von Darboux gerade der Beweis gegeben, den ich vor Weihnachten vortrug.

analytischen Geometrie, (das gleich mit den Coordinaten handelt.) Für die analytische Geometrie haben wir ein erstes System bei Riemann kennen gelernt. Dies ging davon aus, nach Einführung der Coordinaten $x_1, \ldots\ldots, x_n$ gleich als Bogenelement: $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ zu definieren, welches dann insbesondere das Bogenelement einer Mannigfaltigkeit konstanter oder verschwindender Krümmung (ebene Mannigfaltigkeit) sein konnte.

Helmholtz hatte bereits einen anderen, zweiten Ausgangspunkt, indem er die Gruppe der $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Bewegungen im Raum von n Dimensionen an die Spitze stellte. Er sagt also: ich nehme n Variable $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ an; in der Mannigfaltigkeit, die von ihnen erzeugt wird, da kann ich mir eine Gruppe von so und so viel Umformungen denken, welche die allgemeinen Maassbestimmungen unverändert lassen. Diese Betrachtung macht Helmholtz zur Grundlage. Demgegenüber hatte ich den allgemeineren Gedanken, dass man beim Studium einer Mannigfaltigkeit, wenn man derselben „geometrischen" Charakter beilegen will, irgend welche Gruppe von Transformationen (bei welcher nicht notwendig je 2 Punkte eine Invariante haben) an die Spitze stellen kann. *) Vor allen Dingen empfiehlt es sich, als solche Gruppe die der Collineationen (der linearen Umformungen) auszuwählen.

---

* Ann. VI. p. 116 ff., sowie namentlich das Erlanger Programm.

Dieselbe bietet im Raume von n Dimensionen ∞^{n^2+2n} Umformungen dar. *) Das ist dann die Formulierung der speciell sogenannten „Invariantentheorie," wie wir dieselbe im ersten Teile der Vorlesung kennen gelernt haben. Von der Invariantentheorie steigen wir dann herab zur Cayley'schen Maassbestimmung und damit zu den verschiedenen Räumen konstanter Krümmung (um hier die Riemann'sche Terminologie beizubehalten).

Welches dieser 3 Systeme ist nun das beste? Nun, meine Meinung ist die, daß es überhaupt kein bestes System giebt, dass man vielmehr je nach den Interessen, die man verfolgt, diese oder jene Gruppierung vorschlagen wird. Wir proklamieren also unsere Liberalität in dieser Frage. Ich möchte hier eine persönliche Bemerkung einfügen: Als ich nach Leipzig kam, hatte ein Philosoph, Jonath, eine Dissertation geschrieben, betitelt „Ueber das Raumproblem." Dieser hatte von den projektiven Dingen nichts gewußt und also nur über Helmholtz und Riemann

*) Es sind nämlich n+1 homogene unabhängige Variable vorhanden, in den Gleichungen der linearen Transformationen derselben treten $(n+1)^2$ Coefficienten auf. Da nun auf der linken Seite die neuen Variabeln noch mit einem unbestimmten Faktor multipliciert sind, so kommt nur das Verhältnis der $(n+1)^2$ Coefficienten in Betracht, woraus folgt, daß nur ∞^{n^2+2n} verschiedene Collineationen möglich sind.

ein Referat gemacht. Ich machte ihn vor dem Drucke seiner Arbeit auf meine eigenen Untersuchungen aufmerksam und veranlaßte ihn, auch auf diese Rücksicht zu nehmen. Dies that er denn auch, indem er seine Schrift gänzlich umarbeitete und nun sagte: die früheren Arbeiten sind jetzt überwunden, nur noch der Ausgang von der projektiven Geometrie ist berechtigt. Da bei dieser Ansicht natürlich wiederholt mein Name genannt ist, so muß ich entschieden dagegen Einspruch erheben, als wäre dies in der That meine Ansicht. Vielmehr spreche ich mich dahin aus, daß alle genannten drei Systeme neben einander, jedes in seinem Gebiete, zweckmäßig sind.

Nun wollen wir an die Punkte a, b, c einzelne Erläuterungen anknüpfen. Sei es mir dabei gestattet, die Betrachtungen etwas von meinem persönlichen Standpunkte aus vorzutragen.

Zu den zahlreichen Publikationen, die über die betr. Fragen seit 1872 erschienen sind, habe ich bisher immer geschwiegen; doch da ich jetzt im Zusammenhange sie zu erwähnen habe, so werde ich sagen, was ich darüber denke.

Zu a. Der Unterschied der elliptischen und sphärischen Geometrie, den ich betonte, ist trotzdem zuerst nicht beachtet worden. Ich möchte:

b.) auf Graßmann, Elemente der absoluten Geometrie 1876, das zweite Buch des Verfassers / verweisen.

Dort steht Alles friedlich neben einander genannt, was bis dahin entwickelt war. Er sagt ebensowohl, dass sich 2 geodätische Linien bei elliptischer Maass bestimmung immer in 2 Punkten schneiden, als er auch meine Abhandlung nennt, als wenn dieses alles in schönstem Einklang mit einander stände. Im Fischauf also ist die ganze Discussion übersehen.

2.) Zweitens ist zu erwähnen die Arbeit der Astronomen Newcomb in Washington, in Crelle Bd. 83. 1877.*) in der die ganze Theorie des elliptischen Raumes (im Gegensatze zum sphärischen Raume) neu erfunden wird. Diese Abhandlung ist an und für sich sehr gut, doch ohne Kenntnis der Litteratur. Er stellt nebenbei hin, dass in einem Raum von positiver Krümmung die geraden Linien sich sehr gut auch blos in einem Punkte schneiden können. Er erläutert dies, ohne eine eigentliche Ableitung zu geben. Hieran reiht sich an:

3.) die Abhandlung von Killing Crelle. Bd. 86. 1879.)

Killing ist auf die betreffende Frage wiederholt zurückgekommen. Er hat vor allem auch ein Lehrbuch verfasst, über welches ich jetzt einiges im Zusammenhange

*) Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension. (Die letzten Worte des Titels sind sehr merkwürdig und deuten auf ein Missverständnis.)

sagen will. Dies Buch trägt den Titel: Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. es ist 1885 in Leipzig erschienen. Dies Werk ist zwar keineswegs ohne Bedeutung, doch kann ich gleichwohl demselben nicht in jeder Hinsicht zustimmen, wie ich sogleich noch näher ausführe. Killing unterscheidet auch zwischen den beiden Möglichkeiten, (ich will zunächst unsere bisherige Terminologie beibehalten), daß wir also entweder die elliptische Geometrie oder die sphärische Geometrie haben, es ist der Hauptcharakter seiner Darstellung, daß er beide immer neben einander behandelt. Er behauptet aber, daß wir Anderen die Möglichkeit der sphärischen Geometrie übersehen hätten. Es ist ja überhaupt merkwürdig, wie hier Angriff und Vertheidigung wechselt. Zuerst sagt man ausdrücklich, es giebt neben der sphärischen Geometrie noch eine elliptische, die beide positives Krümmungsmaass haben, das wird dann zuerst übersehen, dann von anderer Seite wiedergefunden, endlich 10 Jahre später gesagt, daß bisher die sphärische Geometrie übersehen sei. Killing hat diese seine Behauptung beibehalten, obwohl ich mit ihm darüber ausführlich correspondierte (1880) und auch folgende Differenz berührte:

Killing sagt, im Falle daß die Krümmung 0 oder negativ ist, giebt es nur je eine Raumform, hierin liegt also ein Unterschied von der Maassbestimmung bei positiver

Krümmung ausgesprochen. Dies musste ich von meinem Standpunkte aus bestreiten. Erinnern wir uns an das, was bei Gelegenheit der automorphen Funktionen gesagt war. Wir fanden, dass wir die euklidische Maassbestimmung sehr leicht auf einer Ringfläche darstellen konnten, dass also der ringförmige Typus der Mannigfaltigkeit zweier Dimensionen sehr wohl mit der euklidischen Maassbestimmung verträglich ist. Wir werden also der Bemerkung von Killing, dass es im Falle der hyperbolischen oder parabolischen Maassbestimmung nur eine mögliche Raumform gäbe, widersprechen; wir werden vielmehr sagen, dass es in diesen Fällen ∞ viele zulässige Raumformen giebt.*) Nun haben wir noch gegen einen dritten Punkt bei Killing Widerspruch zu erheben. Killing behauptet, die elliptische Raumform sei die Polarform des sphärischen Raumes. Er meint also, wenn man das Princip der Dualität anwendet, so gehe aus dem sphärischen Raum

*) Diese Differenz zwischen Killing und mir kommt offenbar darauf zurück, dass er nur Mannigfaltigkeiten betrachtet, welche als Ganzes in sich selbst bewegt werden können, während ich darauf aus bin (was der Fragestellung des Paralleleneaxioms besser zu entsprechen scheint), alle Mannigfaltigkeiten zu finden, auf welchen einfach zusammenhängende einfach berandete Stücke frei bewegt werden können.

der elliptische hervor und umgekehrt. Ja, das kann sicher nicht richtig sein, denn der elliptische Raum ist sich selbst dualistisch. Nicht nur haben in ihm 2 gerade Linien einen Schnittpunkt, sondern auch stets 2 Punkte eine Verbindungsgerade, und wenn wir dualistisch polarisieren in Bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt, so geht der Winkelabstand in den Abstand zweier Punkte über und umgekehrt. Wenn wir entsprechend die sphärische Geometrie polarisieren wollten, so muß man an Stelle der Kugelpunkte die Polarebenen in Bezug auf die Kugel, d.h. deren Tangentialebenen, an Stelle der Diametralebenen (welche die größten Kreise auf der Kugel ausschneiden) deren Pole, d.h. die ∞ fernen Punkte des gewöhnlichen Raumes setzen, was weiter zu verfolgen hier kein Interesse hat.

Mit diesem letzten Punkte hängt nun die Terminologie zusammen, die Killing gebraucht. Was wir als den sphärischen Raum bezeichnen, nennt Killing den Riemann'schen Raum, indem er sich dafür entscheidet, daß Riemann seiner Zeit durchaus nur an die sphärische Möglichkeit gedacht hat, den elliptischen Raum aber nennt er die Polarform des Riemannschen Raumes. Gegen die Benennung „Riemannscher Raum" richtet sich die Bemerkung, daß es nicht ganz klar ist, ob Riemann sich die Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung wirklich in dieser Weise gedacht hat; die Benennung „Polarform des Riemannschen Raumes" ist aber durchaus

zu verwerfen. Wenn wir nun doch einmal über besondere Terminologie berichten, so wollen wir gleich mitteilen, was Killing unter „Weierstraß'schen Coordinaten" versteht. Wir sind doch gewöhnt, die elliptische oder sphärische Geometrie auf der Kugel vom Radius a zu studieren: Dieselbe wird dargestellt durch: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Es hat nun gelegentlich Weierstraß im Seminar (Sommer 18[illegible]), an dem Killing als Student teilnahm, gesetzt $z=ap$, so daß wir: $x^2+y^2+a^2p^2=a^2$ als neue Hülfsfläche bekommen, auf der wir die sphärische Geometrie deuten können. Die Einführung dieser Hülfsfläche hat in der That nach einer Seite hin ihre gute Bedeutung. Wenn nämlich das a^2 negativ wird ($=-b^2$), wir also hyperbolische Maassbestimmung annehmen, so bekommen wir als Kugel, auf der wir die hyperbolische Geometrie deuten, eine Kugel mit imaginärem Radius: $x^2+y^2+z^2=-b^2$. Setzen wir wieder $z=ap=ibp$, so kommt $x^2+y^2-b^2p^2=-b^2$. Dies aber stellt wieder eine reelle Fläche dar, wenn wir $x\,y\,p$ als rechtwinklige Coordinaten im Raume deuten, und zwar ein zweischaliges Hyperboloid, auf dessen einer Schale man dann ein Bild der hyperbolischen Geometrie bekommt. Die genannten Coordinaten bieten also den Vorteil, in jedem Falle zu einer reellen Hülfsfläche zu führen.

Hieran schließt Killing dann noch eine große Reihe weiterer Untersuchungen über n-fach ausgedehnte Räume.

Ad. b. Ich werde heute folgerichtigerweise in Betreff des Punktes b. weitere Bemerkungen machen. Es handelte sich hier um ein neues System der reinen Geometrie, welches im Anschlusse an v. Staudt, doch ohne vorherige Entscheidung des Parallelenaxioms, zu entwickeln war. Rücksichtlich dieses Gesichtspunktes will ich zuvörderst über ein Buch von Pasch in Giessen einiges sagen, das 1882 unter dem Titel erschienen ist: Vorlesungen über neuere Geometrie. Der Professor hat gleichzeitig noch eine andere Schrift erscheinen lassen: Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, die ich hier mit anführe wegen der Aehnlichkeit der Anschauungen in beiden Büchern. Pasch beginnt in seinem ersgenannten Werke durchaus mit der projektiven Geometrie. Doch führt er weiterhin das System nicht in dem Sinne durch, wie ich es gesagt habe, dass man nämlich in die projektive Geometrie auf Grund der Viereckskonstruktion, also rein projektivisch, die Zahl einführen soll. Vielmehr betrachtet Pasch in der Mitte des Buches das Messen, und erst auf Grund des Messens führt er die Zahl, d.h. die Coordinaten ein. Es liegt also bei Pasch kein konsequent durchgeführtes System vor.

Was mich veranlaßt, das Buch von Pasch trotzdem an der jetzigen Stelle zu Sprache zu bringen, hat den Grund, daß eine tiefere Frage dort discutiert wird. Es ist dies die Frage nach dem Wesen der geometrischen Anschauung.

Hierüber wollen wir etwas ausführlicher sprechen. Es giebt 2. Auffassungen über das Wesen, über die Schärfe, die Exactheit der geometrischen Anschauungen. Die eine, die herrschende, sagt: Wenn wir eine gerade Linie ziehen. (z. B. mit dem Bleistift) und auf derselben einen Punkt markieren, so sind dies allerdings nur rohe Operationen, die aber in uns ein scharfes Bild entstehen lassen. Im Geiste haben wir also eine klare deutliche Vorstellung von dem, was ein Punkt, eine gerade Linie ist. Die andere dagegen sagt: Nicht nur der Strich, den wir ziehen, oder der Punkt, den wir markieren, hat eine gewisse Ausdehnung nach der Breite oder Dicke, die zwar unbedeutend doch nicht verschwindend ist, sondern auch unsere eigene Vorstellung derartiger Figuren, wie sie wirklich ist, nicht wie wir sie begrifflich postulieren, ist immer mit Ungenauigkeiten behaftet. Pasch vertritt nun durchaus diesen zweiten Standpunkt. Ich behaupte, dass unser Vorstellen von den räumlichen Figuren uns nur ein unvollkommenes Bild gewährt, daß wenn wir in der Mathematik mit genauen Figuren operieren dies nur mit Hinzunahme von begrifflichen Postulaten geschieht. – Wir werden zunächst daran die Bemerkung knüpfen: Wenn die nicht-euklidische Geometrie überhaupt zulässig sein soll, ja dann müssen wir uns für die Annahme einer solchen Ungenauigkeit

unseres Raumverstellens entscheiden, die erst durch bestimmte begriffliche Festsetzungen beseitigt werden muss. Diese Annahme ist die Vorbedingung der Gauss'schen Doktrin von der nichteuklidischen Geometrie. Denn ohne dieselbe müssten wir ja ganz genau vor Augen sehen, ob die parabolische oder hyperbolische oder elliptische Ansicht die richtige ist, bez. welcher numerische Betrag des Krümmungsmaasses vorliegt. Wir werden daher unsere Raumvorstellung auf eine Linie stellen müssen mit gewissen mit Fehlern behafteten Messungen, sie ist eben gewisser Correctionen fähig, die natürlich innerhalb bestimmter Grenzen sich halten müssen, wenn sie nicht unrichtig werden sollen.

Nun wäre zu untersuchen, wie können wir über eine solche fundamentale Frage Klarheit bekommen?

Wenn wir immer wieder uns an die Figuren halten, die wir in der Elementargeometrie behandelt haben, ja, dies sind so einfache Verhältnisse, hier hat sich die begriffliche Festsetzung mit dem Bilde, das wir vor Augen haben, so fest associirt, dass wir daraus keine Beweiskraft schöpfen können. Dies ist eine alte Erfahrung. Wenn man eine Theorie in der Jugend gelernt hat, sie stets vor Augen gehabt hat, dann hält man sie späterhin für a priori richtig. Nehmen wir z. B. die Erhaltung der Energie in der Mechanik.

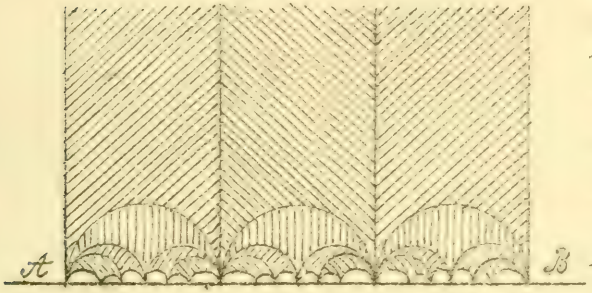
Dieser Gedanke, daß die Kraft, die Bewegung, unzerstörbar sei, ist uns jetzt allerdings ganz geläufig, doch vor 50 Jahren etwa hat man es noch nicht gewußt, vielmehr hat sich diese Anschauung erst gegen manchen Widerspruch siegreich durcharbeiten müssen. Oder wem dieses Beispiel zu modern ist, der denke an die Gesetze der Trägheit. Daß ein Punkt in geradliniger Bahn mit constanter Geschwindigkeit sich fortbewegt, wenn keine Kraft auf ihn wirkt, dies scheint uns jetzt ganz selbstverständlich. Die Philosophen zur Zeit des Cartesius jedoch hielten die Kreisbewegung für viel einfacher als die auf gerader Linie, daß der Massenpunkt, nur mit einer einmal empfangenen Geschwindigkeit versehen, weiterhin eine gerade Linie und diese gleichförmig beschreibt, hat erst Galilei durch Experimente nachgewiesen und hat großen Widerspruch erfahren. Heute erscheint es als Denknotwendigkeit. Diese Beispiele aus der Mechanik sollen zeigen, wie solche Vorstellungen, die uns jetzt selbstverständlich erscheinen, doch nicht a priori uns innezuwohnen brauchen.

Betrachtet man nun recht genau ein irgendwie gezeichnetes Dreieck, so werden wir durch unsere Gewöhnung wie unwillkürlich dazu gedrängt, vielmehr an das Idealdreieck, dessen rohes Abbild jenes Dreieck ist, zu denken. Wir wollen daher andere Figuren

nehmen, die uns nicht so von der Elementargeometrie her bekannt sind, und uns fragen, ob bei ihnen nicht die begriffliche Vorstellung, die wir in uns zu bilden haben, über unsere wirkliche Anschauung hinausgeht. Wir wollen die Figuren der Theorie der automorphen Funktionen entnehmen, von denen wir schon neulich einiges erzählten. Dort muß man sich in räumliche Verhältnisse hineindenken, die man anfangs sehr gut übersieht, die aber, wenn man die vervollständigen will, vermöge ihrer überaus scharfen und immer schärfer werdenden Struktur meinem Dafürhalten nach sich unserem wirklichen Vorstellen bald entziehen. Selbst langjährige Uebung hilft, wenn ich von mir selbst reden darf, diese Schwierigkeit nicht herbei. Wir wollen z. B. eine Figur betrachten, die in dem Teil der automorphen Funktionen eine Rolle spielt, der sich mit den „elliptischen Modulfunktionen" beschäftigt. Wir werden diese Figur übrigens in den nächsten Stunden noch öfter gebrauchen. Man zeichne sich zunächst ein Kreisbogendreieck, begrenzt von einem Halbkreise und den beiden parallelen Halbtangenten in den Diametralpunkten. Wir nennen dies ein „Kreisbogendreieck", indem wir die geraden Linien als einen speciellen Fall des Kreisbogens auffassen. Man sei die Vorschrift, diese Figur an den Seiten

wiederholt nach dem Gesetz der reciproken Radien zu vervielfältigen; es handelt sich dann um die Gesammtfigur, die solcherweise entsteht. (NB. Was gewöhnliche Transformation durch reciproke Radien an einem Kreise ist, ist gewöhnliche Spiegelung in Bezug auf die gerade Linie.)

Figur 75.



Spiegeln wir die Figur zunächst an den geradlinigen Seiten, so werden wir mit dem ursprünglichen Dreieck übereinstimmende (congruente) Dreiecke erhalten, welche sich nach links und rechts in unendlicher Zahl anreihen. Bei der Spiegelung an dem Halbkreise gehen die begrenzenden geraden Linien gleichfalls in 2 Halbkreise über, welche von dem ersteren überspannt werden. Noch können wir die Figur sehr gut übersehen. Doch wir wollen diese Spiegelung nun an den neu entstehenden Begrenzungslinien immer wiederholt vornehmen; es entstehen dann Kreisbogendreiecke in unbegrenzter Zahl, die sich dichter und immer dichter werdend auf die gerade Linie AB. zudrängen. Die Dreiecke werden [illegible]

kleiner werden als jede Ausdehnung, die man vorschreiben möge, kleiner als jede Größe, die durch die Leistungsfähigkeit der Optik noch sichtbar gemacht werden kann. Ja, in der Theorie der Modulfunktionen ist jedes solche kleine Dreieck so groß wie das ursprüngliche. Wir werden bei nächster Gelegenheit eine Transformation aufstellen, die ins jedes so kleine Dreieck in ein großes überführt. *) die automorphe Funktion verläuft in dem großen Dreieck nicht anders wie in dem kleinen. Doch vorstellen, kann man sich dies sicher nicht. Es belehrt uns dies Beispiel darüber, daß die begriffliche Forderung, mit der man in der Mathematik operiert, über die lebendige Vorstellung, deren Genauigkeit eine begrenzte ist, hinausgeht. Wir haben hier übrigens nur ein elementares Beispiel aus der Theorie der automorphen Funktionen dargestellt, es gibt z. B. auch solche Figuren, wo in jedem Dreieck der Modulfigur noch ein kreisförmiger Ausschnitt, ein Fenster sich befindet, in welchem sich alles wieder spiegelt. Die neuere Funktionentheorie liefert noch eine ganze Reihe anderer frappanter Beispiele dieser Art.

Man wird aus dem bisher Gesagten ersehen, daß diese Frage nach der Natur der räumlichen Anschauung

*) nämlich die Transformation $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier ganze Zahlen von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sind.

selbstverständlich auch bei der Begründung der Differentialrechnung eine ausserordentlich grosse Rolle spielt. Historisch hat bekanntlich die Differentialrechnung um die Betrachtung einer Curve oder der Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Punktes sich geknüpft. Der Differentialquotient wurde durch die Tangente der Curve, bezw. die Geschwindigkeit des Punktes gelöst. Auch dies sind Bilder, die unserer räumlichen Anschauung entnommen sind. Es ist nun die den früheren Betrachtungen ganz analoge Frage, ob diese Bilder nicht vielleicht nur eine äussere Veranlassung sind, sich eine reine Differentialrechnung zu schaffen, die aber in ihren feineren Festsetzungen über die äussere Veranlassung hinausgreift. In Betreff dieser Frage bringe ich folgende Thatsache in Erinnerung, dass die neuere Functionentheorie stetige Functionen kennt, welche Differentialquotienten besitzen, während doch die natürliche Anschauung uns zu belehren scheint, dass jede stetige Curve eine Tangente habe. Auch in den letzten Decennien hat man sich immer wieder gezeigt, dass eine stetige Function nothwendig einen Differentialquotienten besitzen müsse. Wie ist nun dieser Zwiespalt zwischen der Differentialrechnung und der Anschauung anders zu erklären als durch unsere

Annahme von der Ungenauigkeit der Anschauung.

Ich darf hier einen kleinen Aufsatz von mir selbst nennen aus dem Jahre 1873: „Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve." (Einführung des Functionsbereiches.) Diese Arbeit erschien damals in den Erlanger Berichten sie ist aber seitdem abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 22. Der Grundgedanke in dieser Schrift ist: klar auseinander zusetzen dass die Annahme, jede Curve habe eine Tangente und also habe jede stetige Function einen Differentialquotienten, in der That auf die Ungenauigkeit unserer Auffassung zurückgeht. Pasch hat in seinem Buche über Differential- und Integralrechnung vom Jahre 1882 gleichfalls diesen Gedanken vertreten. Es ist diese Ansicht aber selbstverständlich nicht unwidersprochen geblieben. Eine Darstellung von der Gegenseite ist z. B. Köpcke, Math. Ann. 29 (1886): Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen." (Insbesondere pag. 136 ff.) Wir wollen schliesslich noch auf eine hierher gehörige Arbeit von Pasch hinweisen, Ann. 30. (1887): Ueber die projektive Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde," eine Arbeit, in der er seine von der meinigen doch vielfach abweichende Auffassung nochmals zusammenfasst. Wir geben

diese Citate als Material für ein ausführliches Studium, ohne weiter darauf eingehen zu wollen. Ich möchte jedoch den Wunsch aussprechen, daß ein Mathematiker, der zugleich moderne psychologische Kenntnisse besitzt und also weiß, was die heutige Erkenntnistheorie über unser Vorstellungsvermögen sagt, diese Frage einmal ausführlich discutierte. Die Philosophen, welche bisher über solche Fragen geschrieben haben, standen nicht auf der Höhe der mathematischen Bildung, z. B. wußten sie nichts von der automorphen Funktionentheorie. Uebrigens möchte ich mir vorbehalten, in den nächsten Stunden auf diese Fragen wiederholt zurückzukommen, indem ich in Verbindung damit geradezu discutiere: „Was sind die Axiome der Geometrie und wie sind sie entstanden!" Bei Helmholtz und anderen sind diese Fragen nach der Genauigkeit unserer räumlichen Anschauung übergangen, gerade auch da, wo von der Entstehung der Axiome die Rede ist, und diese Entstehung auf die doch jedenfalls ungenaue Operation des thatsächlichen Messens zurückgeführt wird. Daß die Mathematik genauere Festsetzungen bedarf, als die natürliche Vorstellung bietet, daß also wohl ein Sprung stattfindet zwischen dem Begriffenen und dem unmittelbar Angeschauten, ist von all

diesen Autoren nicht berührt, auch die Bücher über Differentialrechnung (mit Ausnahme von Pasch) schweigen darüber.

Ich möchte nun zurückkommen auf jenen Gesichtspunkt unter b, der sich auf den Beweis des Fundamentalsatzes der neueren Geometrie bezieht, nämlich des Satzes: daß zwei Gebilde erster Stufe projektiv aufeinander bezogen sind, wenn je 4 harmonischen Elementen des einen immer 4 harmonische Elemente des anderen entsprechen. Ich hatte schon gesagt, daß ich beiläufig in meiner Arbeit über die nicht-euklidische Geometrie hierauf eingegangen bin und bemerkte, daß der v. Staudt'sche Beweis nicht ausreichend ist. Die sich hieran knüpfende Discussion stellte das Wesen der Sache jedenfalls viel klarer. Ich möchte über diese Discussion einiges berichten.

Es sind eine ganze Reihe von Namen zu nennen:
Lüroth und Zeuthen in den Annalen VII.
Thomae und Reye in ihren bezüglichen Lehrbüchern der neueren Geometrie.
Darboux - den Annalen 17.
Schur, Annalen 18, endlich Pasch.

Wenn man die Bemerkungen, die von den verschiedenen Seiten gemacht wurden vergleicht, sieht man, daß wieder 2 fundamental verschiedene Auffassungen einander gegenüberstehen. Die einen Lehrten sehen

sich in der Lage, wenn man von Punkten und geraden Linien spricht, unmittelbar die gewöhnliche Anschauung zu benutzen, sie operieren z.B. mit der Vorstellung, daß ein Punkt längs einer geraden Linie sich stetig verschiebt, wenn dabei etwa zwei Punkte sich einholen, so giebt es eine scharf bestimmte Coincidenzstelle. Bei ihnen ist also die Bildung des Begriffs der Stetigkeit unmittelbar durch die Intuition gegeben. Demgemäß sehen sie es auch als gestattet an, gleich in den Fundamenten geometrische Beweise auf solche Vorstellungsweisen zu begründen. *) Hiermit hängt zusammen die Stellung, die man zu dem Irrationalen in der Mathematik zu nehmen hat. Wenn wir dieser Schule der Anschauung huldigen, so ist die Annahme der Irrationalzahlen einfach eine Folge der Anschauung.

Die andere Auffassung dagegen sagt, daß man es zunächst mit ungenauen Punkten zu tun hat,

*) Weiter hinauf, wo es sich nicht mehr um die Fundamente handelt, benutze ich selbst gern solche geometrischen Beweise, ich betrachte dieselben aber nur als eine Skizzierung der genauen Beweise und lasse mich auf keine Diskussion darüber nicht ein, weil ich annehme, daß der Uebergang von der geometr. Anschauung zu exakten Formulierungen eben in den Fundamenten bereits erledigt worden sei

und in der geometrischen Anschauung nur eine Veranlassung hat, sich parallellaufende genauere Begriffe auf logischem Wege zu bilden; die wirklichen Begriffe sind daher wesentlich schärfer als die geometrische Anschauung. Hier wird man gut thun, die mathematische Betrachtung der geometrischen Verhältnisse auf einen vorerst arithmetisch ausgebildeten Begriff der Irrationalzahl zu gründen.

Die erste dieser beiden Auffassungen ist durch die Tradition von Euklid her sanctioniert. Man vergleiche auch Dedekind in Braunschweig, der in seiner kleinen, aber sehr lesbaren Schrift: „Ueber Stetigkeit und irrationale Zahlen" es wohl am schärfsten ausgesprochen hat, daß die Existenz der Irrationalzahlen geradezu eine Folge der geometrischen Anschauung sei.

Die Anwendung dieser Bemerkungen auf den Grundsatz der projektiven Geometrie sondert sich nun so: Wenn man sich der zweiten Anschauung anschließt, so ist es, wie gesagt, zweckmäßig, die Lehre von dem Irrationalen vorher zu entwickeln und dann erst den v. Staudt'schen Grundsatz zu betrachten. In diesem Falle giebt es wohl keinen besseren Beweis des Satzes als den von uns früher vorgetragenen, der sich

an Darboux Anm. 17 anschliesst. *) Wir schieden, wie man sich erinnern wird, zwischen den rationalen und irrationalen Punkten, wiesen die Gültigkeit des v. Staudt'schen Satzes zunächst für die rationalen Punkte nach und schlossen dann auf indirektem Wege auf die irrationalen. Wenn man sich dagegen der anderen Anschauung anschliessen will, dass das Irrationale direkt aus der geometrischen Betrachtung der Figuren abgelesen wird, dann treten andere Beweise in ihr Recht, bei denen man mit Punkten operirt, die längs einer geraden Linie sich stetig fortbewegen. In diesem Sinne wollen wir auf Schur verweisen: Anm. 18.

Nun will ich hieran noch eine litterarische Bemerkung knüpfen. Der hier besprochene Gegensatz der beiderseitigen Anschauungen über das Wesen der Geometrie ist in einem Werke verarbeitet worden, das der Mathematiker Du Bois im Jahre 1882 veröffentlicht hat unter dem Titel: „die allgemeine Funktionenlehre." Es ist nur ein erster Teil erschienen, aber in diesem gerade finden sich die Auseinandersetzungen, die wir meinen. Du Bois läßt geradezu 2 Vertreter der beiden Richtungen debattieren, einen Empiristen

*) resp. an meine eigene in Anm. 17 gegebene Reproduction des Darboux'schen Gedankenganges.

mit einem „Idealisten", ohne jedoch schließlich eine Entscheidung darüber zu treffen, wer von beiden nun Recht habe. Er läßt vielmehr jedem Mathematiker zum Schluss freie Entscheidung, was er denken will. Danach möchte ich nun meine eigene Ansicht mit folgenden Worten bezeichnen. Ich betrachte die geometrischen Eigenschaften der wirklich angeschauten Figuren (die ich als ungenau hinstelle) vom Standpunkte des Empiristen; sobald aber von einer mathematischen Behandlung die Rede sein soll, so stelle ich idealistische Anforderungen, indem ich absolute Schärfe der begrifflichen Festsetzungen verlange. Um auf unser Beispiel zurückzukommen: Ich sehe die irrationalen Punkte nicht wirklich vor mir, wie ich denn zwei Punkte, die einander ganz nahe gerückt sind, auch in der Vorstellung nicht mehr unterscheiden kann; ich verlange jedoch, daß sie in der mathematischen Behandlung geschieden werden. Ich will diese Ansicht hier noch durch Zweckmäßigkeitsgründe motivieren. Wir finden auf der einen Seite die angewandte Mathematik, in der es sich um Verhältnisse handelt, die nur bis zu einem gewissen Grade Genauigkeit verlangen und sogar vertragen; auf der anderen Seite jedoch haben wir die reine Mathematik, in der, um z. B. speciell an die Funktionentheorie zu erinnern, die empiristische Auffassung

durchaus nicht ausreicht. Ich muß daher, da ich keines der genannten Gebiete fallen lassen will, einen Standpunkt einnehmen, der beiden Anforderungen gerecht wird. Der einzige dies leistende Standpunkt scheint mir der oben angegebene zu sein. Ich habe übrigens diese selbe Sache am Ende des letzten Sommersemesters in meiner Vorlesung über die Differentialgleichungen der Physik berührt. *) Es handelte sich dort um die Convergenz unendlicher Reihen. Ich habe damals ausdrücklich auf den Unterschied hingewiesen zwischen der angewandten Mathematik, welche nur beschränkte Genauigkeit beansprucht und der reinen Mathematik, die absolut genau sein will. Unter angewandter Mathematik habe ich dort freilich, der Kürze halber, nur Physik, Mechanik, Astronomie u.s.w. verstanden, nicht aber Geometrie: In bezug auf diese will ich daher jetzt hinzufügen, daß ich alle Geometrie, welche sich auf gezeichnete oder auch nur wirklich vorgestellte Figuren bezieht, in dem hier in Betracht kommenden Sinne der angewandten Mathematik zurechne, alle Geometrie aber, welche unbekümmert um die wirkliche Vorstellbarkeit der in Betracht gezogenen Operationen rein logisch verfährt, der reinen Mathematik.

*) vergl. Ausarbeitung.

Hieran knüpft sich noch eine allgemeine Bemerkung darüber, ob wir mit unserem streng mathematischen Bestrebungen in den letzten Decennien nicht zu einseitig vorgehen. Es ist doch sicher, daß die reine Mathematik immer sich mit den Anwendungen in lebhaftester Verbindung halten soll, wenn sie auch noch so sehr als Selbstzweck verfolgt werden mag. Wenn wir uns nun fragen, was dies für Theorieen der reinen Mathematik sind, die bei den Anwendungen besonders in Betracht kommen, so sind dies folgende: Es gilt nicht aus scharfen Praemissen scharfe Schlüsse zu ziehen, sondern vielmehr diejenigen Schlüsse anzugeben, die sich aus Praemissen von begrenzter Genauigkeit mit vorgeschriebener Genauigkeit folgern lassen, oder auch zu sagen, mit welcher Genauigkeit noch Schlüsse gezogen werden können. Hier werden dann alle diejenigen Gebiete der reinen Mathematik als besonders wichtig erscheinen, die man als die Lehre von der Interpolation, der Differenzenrechnung und dergl. bezeichnet. Wenn man Acht gibt, was z. B. der rechnende Astronom von der reinen Mathematik besonders gebraucht, so wird man finden, daß dies eben die erwähnten Gebiete sind. Ganz Entsprechendes gilt für jeden Physiker, der sich mit

der molecularen Struktur der nur scheinbar homogenen Materie beschäftigt. In diesem Sinne muß ich anerkennen, daß es eine mathematische Schule gibt, die ihre ganze Energie in den letzten Decennien gerade auf diese Fragen gerichtet hat. Es ist dies eine Schule, die in Deutschland schwer zugänglich ist, die russische Schule von Tschebyscheff in Petersburg (geb. 1821). Ich betrachte es als wünschenswert, daß wir sie in Deutschland genauer untersucht werden von der eigentlichen Leistung dieser Schule.

Ich will jetzt zu unseren engeren Betrachtungen zurückkehren, die sich auf eine Begründung einer rein projektiven Geometrie beziehen. Wir wollen eine Lücke ergänzen, die da gelassen war im Verlauf unserer Vorlesung. Es handelte sich um die Bemerkung von Staudt's, daß man rein projektivisch die Zahl in die geometrischen Verhältnisse einführen kann, eben vermittelst der Würfkonstruktion. Ich habe dies streng nachzuweisen, aber bisher aufgeschoben, um in der Zwischenzeit erst die Hülfsmittel kennen zu lernen, die wir dabei benutzen wollen. Wir können unserer folgenden Betrachtung dementsprechend die Ueberschrift voransetzen: Einführung der projektiven Coordinaten

ohne jede Massgemeinschaft, nur mit Hülfe der Vierseitskonstruction; dem fügen wir gleich hinzu, entsprechend der ganzen Anlage unserer Vorlesung: „und ohne über das Parallelenaxiom eine Annahme zu machen." Wir werden diesem letzten Umstande Rechnung tragen, wenn wir uns, wie schon neulich angedeutet, auf Konstruktionen beschränken, die nicht über einen begrenzten Raum hinausgehen. Ob dann die gerade Linie, wenn wir ihre Verlängerung über den einmal angenommenen Raumteil hinaus berücksichtigen wollten, das Parallelaxiom befriedigt, oder allgemein zu reden, ob wir, wenn wir auf Massverhältnisse achten, elliptische, parabolische oder hyperbolische Massbestimmung voraussetzen, dies ist dann eine Frage für sich. Wir wollen nun zeigen, wie wir die Coordinaten der projektiven Geometrie innerhalb eines begrenzten Raumteiles thatsächlich einzuführen im Stande sind. Die einzige Voraussetzung, die wir dabei machen müssen, zeigt folgende Ueberlegung: Wir haben, früher den v. Staudt'schen Satz kennen gelernt, dass wir zu 3 Punkten a, b, d einer geraden Linie unter Anwendung der Vierseitskonstruktion den vierten Punkt c konstruieren, der mit den ersten der gewöhnlichen Sprechweise zufolge ein harmonisches Quadrupel bildet. Dass wir dann stets auf denselben Punkt c treffen, wie verschieden wir das

betr. Versuch mich wählen muss. Wir haben diesen Satz jedoch nur beweisen können, indem wir im dreidimensionalen Raume, sagen wir in einem begrenzten Raumstück mit Punkten, Strahlen und Ebenen operierten. Die Voraussetzung, die wir hier machen müssen, ist, wie wir ausdrücklich angeben wollen, dann die:

Wir müssen annehmen, dass durch 3 Punkte unseres Raumstückes immer eine und nur eine Ebene geht, wenn sie nicht so viele sind. (Im letzteren Falle liegen die drei Punkte auf einer geraden Linie). Dies ist eine Annahme, zu der uns unsere Anschauung, gewiss aber nur ungenau, hinführt, doch verlangen wir jetzt mit aller begrifflichen Schärfe, dass diese Annahme auch genau, mit aller Strenge stattfindet. Dies sei unser Axiom. Man erkennt, welche Bedeutung wir dem Worte „Axiom" beilegen. Man liest gewöhnlich: „Das Axiom drückt eine Thatsache aus, die uns in unserer Anschauung unmittelbar deutlich ist, die also keiner Präcisirung mehr fähig ist." Ich würde statt dessen sagen: „Ein Axiom drückt eine Forderung aus, dass das, was uns ungenau in der Auffassung vorschwebt, genau richtig sein soll." Dies entspricht auch der Wortbedeutung von „Axiom" (gleich „Forderung"). Haben die alten griechischen Geometer wirklich nur eine Auffassung gehabt, als sie ihre Axiome aufstellten?

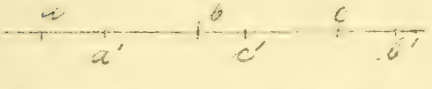
Dies wäre also die Voraussetzung, die wir gebrauchen, um nachzuweisen, dass aus den drei Punkten a, b, d auf Grund der Vierseitskonstruktion nur ein bestimmter Punkt c folgt. Die Punkte, die wir zeichnen, sind allerdings ungenau; die Punkte, die wir postulieren, sollen aber genaue Punkte sein, und auf sie bezieht sich dann unser Theorem.

Wir haben bereits früher gesagt,: indem wir jetzt den Punkten a, b, d die Zahlenwerte 0, 1, ∞ beilegen, wollen wir den Punkt c mit der Zahl 2 bezeichnen. Es wurde dann behauptet, daß wir durch immer wiederholte Vierseitskonstruktion in der Lage seien, allen Punkten auf der geraden Linie bestimmte Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ beizulegen. Wir haben also jedenfalls weiterhin erstens zu zeigen, dass man überhaupt auf jedem Grundgebilde erster Stufe mit Hülfe wiederholter Vierseitskonstruktion eine Skala konstruieren kann, d. h. daß man von 3 Elementen ausgehend, denen man 0, 1 und ∞ als Zahlen beilegt, jedem anderen Element des Gebildes einen bestimmten Zahlenwert x beilegen kann.

Doch noch ein zweiter Punkt ergab sich, auf den dieser Satz unmittelbar hinleiten mußte.

Wir können auf derselben geraden Linie (demselben Grundgebilde) irgend eine zweite Skala aufstellen, indem wir von beliebigen drei anderen Punkten a', b', c' ausgehen. Es ist nun die Frage, wie hängen diese so definierten x' mit den früheren x zusammen, d. h. welches ist die Coordinatentransformation, welche die x in die x' überführt und umgekehrt? Wir hatten behauptet, man kann zeigen, dass diese Substitution durch die linear gebrochene Abhängigkeit gegeben wird: $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Fig 76.



Diese beiden Behauptungen müssen wir jetzt erbringen. In der That hat man damit die Grundlage für die analytische Behandlung der projektiven Geometrie. Man kann dann z. B. leicht zeigen, dass die geraden Linien der Ebene sich durch Gleichungen ersten Grades ausdrücken, etc. etc. Es ist offenbar eine Ehrenpflicht für uns, dies jetzt durchzuführen.

Wir wollen nun wieder vorerst, um leichter die Verhältnisse zu erfassen, auf die es schließlich ankommt, voraussetzen, dass die gewöhnliche messende Geometrie bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung wollen wir uns dann übergangen, wie wir von den

Punkten $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ ausgehend, unter x eine gewöhnliche Abscisse verstanden, eine immer wiederholte Konstruktion des vierten harmonischen Punktes so anordnen können, dass wir jeden Punkt mit rationaler Abscisse und zwar jeden einmal erreichen können. Dies wird gleichsam ein Vorstudium zu der weiteren Betrachtung unserer Frage sein. Um deutlich zu machen, worauf es uns jetzt ankommt, werden wir zunächst im Bezug auf 0 und 1 zu ∞ den vierten harmonischen Punkt suchen und diesem den Zahlenwert $\frac{1}{2}$ beilegen, hierauf in Bezug auf 1 und ∞ zu 0 den vierten harmonischen Punkt, dem wir den Wert 2 beilegen und in Bezug auf 0 und ∞ zu 1 den vierten harmonischen Punkt, dem wir den Wert -1 beilegen. Jetzt wäre die Frage, wie wollen wir nun weiter gehen, welche 3 Punkte wollen wir nun heraus greifen, um zu ihnen den vierten harmonischen zu suchen? Wir sehen, wir haben schon jetzt eine grosse Reihe von Möglichkeiten für die Auswahl dieser Punkte, die sich noch erheblich vermehren werden, sobald wir jetzt noch weitere Punkte konstruiert hätten. In dieser Reihe von Möglichkeiten wollen wir nun Ordnung schaffen, indem wir eine bestimmte Verabredung treffen.

Wir wollen die Fg. auf pag. 314 benutzen, die der Theorie der elliptischen Modulfunktionen entlehnt ist. Der Zweck

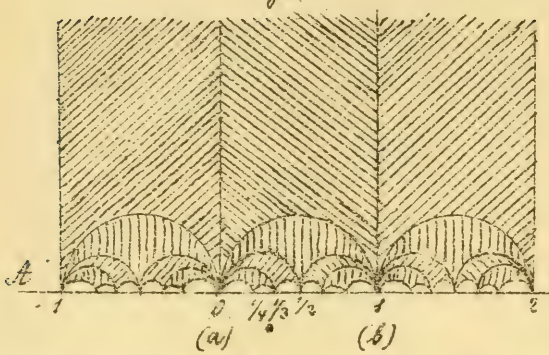
dieser Anlehnung an die Modulfunktionen ist natürlich nur der, übersichtlich vor Augen zu haben welche Punkte wir bei Aufstellung der Skala konstruiert haben, um von ihnen in ganz bestimmter Weise weiter zu gehen. Der Ausgangspunkt für unsere weitere Betrachtung ist daher, wie wir nochmals hervorheben wollen, der:

„Die große Unbestimmtheit, welche zunächst in der Forderung liegt, aus den 3 Punkten 0 1 und ∞ immer wieder einen neuen (4ten harmonischen) Punkt abzuleiten, wollen wir dadurch beseitigen, daß wir genau so bei der Aufsuchung immer wieder eines neuen 4ten harmonischen Punktes vorgehen, wie dies in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen bei der Konstruktion der Dreiecksachen thatsächlich geschieht, indem wir aus dem anfänglich gegebenen Kreisbogendreieck 01∞ immer wieder erneut durch Symmetrie (oder durch Inversion) ein neues Kreisbogendreieck herstellen, welches sich an den Komplex der bereits konstruierten Kreisbogendreiecke glatt anschmiegt."

Wir werden so z. B. die Punkte 2 und durch die erste Spiegelung des Dreiecks an den geradlinigen Seiten finden, den Punkt 1/2 durch Inversion des ursprünglichen Dreiecks in Bezug auf den begrenzenden

Halbkreis. Wenn wir das letzthin erhaltene Dreieck

Figur 77.



ferner in Bezug auf den links liegenden begrenzenden Halbkreis durch Inversion umformen, erhalten wir den Punkt 1/3, der der 4te harmonische Punkt zu 1 in Bezug auf 0 und 1/2 ist, u.s.w. fort.

Wir wollen nun einmal einen bestimmten, in der angegebenen Weise festgelegten Punkt der Strecke AB ins Auge fassen. Wir sagen, dieser Punkt hat die Abscisse $\frac{x_1}{x_2}$, wo x_1 und x_2 beliebige ganze Zahlen sind. Wir wollen ferner ausdrücklich festsetzen, daß die Zahlen x_1 und x_2 keinen gemeinsamen Teiler besitzen sollen. Wir können dies, ohne eine Einschränkung zu machen, annehmen, denn wäre ein gemeinsamer Teiler da, so brauchten wir ihn nur einfach wegzuheben. Doch wollen wir über das Vorzeichen von x_1 und x_2 keine Bestimmung treffen, wir wollen vielmehr setzen: $x = \frac{\pm x_1}{\pm x_2}$, und uns vorbehalten, beide Male das + oder beide Male das − Zeichen zu wählen, je nachdem es uns besser passt. Wir werden nun

insbesondere hiernach den 0- Punkt und den Unendlichkeitspunkt darstellen? Offenbar müssen wir in Betreff des Nullpunktes, wenn wir im Zähler für x_1 Null setzen, im Nenner 1 nehmen; denn würden wir etwa $x_2 = 2$ oder 3 setzen, so würden Zähler und Nenner ja den gemeinsamen Teiler 2 resp. 3 besitzen. Entsprechendes gilt für den Unendlichkeitspunkt.

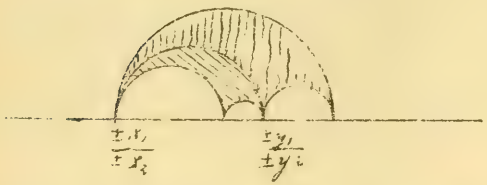
Wir setzen also:

$$0 = \frac{\pm 0}{\pm 1}, \quad \infty = \frac{\pm 1}{\pm 0}.$$

Ehe wir nun hierauf gestützt, das Fortschreitungsgesetz für die Darstellung der Punkte auf der Geraden AB angeben, wollen wir noch eine allgemeine Bemerkung vorausschicken. Wenn wir zwei Punkte $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ haben, so wird (sofern wir, wie wir augenblicklich zu thun, mit den gewöhnlichen Formeln der analytischen Geometrie operieren) die Gesammtheit aller der Punktepaare, die zu den ersten beiden Punkten harmonisch ist, in ihren Abscissen gegeben durch: $\frac{x_1 + \lambda y_1}{x_2 + \lambda y_2}$ und $\frac{x_1 - \lambda y_1}{x_2 - \lambda y_2}$. Es sei nun der eine Endpunkt eines beliebigen in der Figur vorkommenden Kreisbogens mit $\frac{\pm x_1}{\pm x_2}$, der andere mit $\frac{\pm y_1}{\pm y_2}$ bezeichnet. An einen solchen Kreisbogen reiht sich nun einerseits ein Dreieck an, das im Innern

und andererseits ein Dreieck, das nicht anders zu einer neuen Ecke führt, nämlich jene beiden Dreiecke, zu deren Begrenzung eine solche Kreislinie gehört. Es wird nun die Frage sein, in welcher arithmetischen Beziehung die so gezeichneten Punkte $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ zu einander stehen und ferner, was es für ein zu ihnen harmonisches Punktepaar ist, das durch die Ecken der anliegenden Dreiecke geliefert wird. Wir bemerken wir kommen hier ganz in die Zahlentheorie hinein (wie wir ja auch bereits sagten, dass x_1 zu x_2 und y_1 zu y_2 „teilerfremd" sein sollen.). Der erste Teil der Frage sei wie folgt beantwortet:

Fig. 76.



Ich behaupte, in unserer Figur sind immer solche 2 Punkte durch einen Kreisbogen mit einander verbunden, die bei ihrer Darstellung in der Gestalt $\frac{\pm x_1}{\pm x_2}$ und $\frac{\pm y_1}{\pm y_2}$ eine Determinante $\pm x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ geben.

Ich behaupte ferner noch weiter:

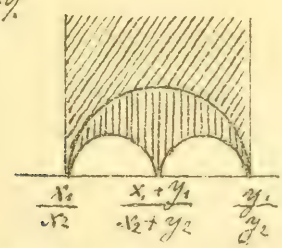
Umgekehrt wird auch jedes Zahlenquadrupel x_1, x_2, y_1, y_2, welches eine Determinante ± 1 gibt, in unserer Figur durch 2 Punkte dargestellt sein, die durch einen Kreisbogen verbunden sind.

Beiläufig sei bemerkt, wenn wir die Determinante gleich ± 1 setzen, so hängt dies damit zusammen, daß wir die Vorzeichen von x_1 und x_2, y_1 und y_2 am bestimmt gelassen haben.

Was nun die beiden Punkte anbetrifft die wir den ersten beiden ansetzen, so werden offenbar deren Abscissen (da es sich um harmonische Punkte handelt) in der Form darstellbar sein: $\frac{x_1 + \lambda y_1}{x_2 + \lambda y_2}$ und $\frac{x_1 - \lambda y_1}{x_2 - \lambda y_2}$

Ich behaupte nun, daß in diesem Falle λ der Wert 1 beizulegen ist, so daß die beid. beiden Punkte gegeben sind durch: $\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}$ und $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$, wobei wir natürlich im Zähler und Nenner noch x hinzusetzen können, damit es den Anschein verliert, als sei der Punkt x vor dem Punkte y bevorzugt.

Fig 79.



Der Beweis, den wir zu führen haben, gliedert sich dem Gesagten entsprechend in 2 Teile. Einmal werden wir nachzuweisen haben, daß alle Punktepaare in der Figur dem angeführten Gesetz gehorchen, dann daß umgekehrt alle Zahlen, die dem Gesetz gehorchen, als Abscissen aufgefaßt auf Punkte unserer Figur führen.

Den ersten Teil des Beweises führen wir durch

vollständige Induktion. Wir zeigen zunächst, daß unsere Behauptung richtig ist für gewisse ausgewählte Punktepaare. Wir betrachten z. B. die beiden Punkte des Ausgangsdreiecks $\frac{x_1}{x_2} = \frac{0}{1}$ und $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{1}$. Die Determinante derselben ist, (wenn wir die Vorzeichen in der angegebenen Weise willkürlich wählen) sicher gleich -1. $(x_1 y_2 - x_2 y_1 = -1)$.

Nun wollen wir in der angegebenen Weise aus $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ die weiteren Punkte bilden. Wir erhalten:

$$\frac{x_1 + y_2}{x_2 + y_2} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Wir sehen, daß in der Tat dies die dritten Eckpunkte der beiden Dreiecke sind, die sich an den Halbkreis über x und y anschließen.

Nun das Verfahren der Induktion durchzuführen, müssen wir daher nachweisen, daß die aufgestellte Behauptung, wenn sie für ein beliebiges Punktepaar x, y richtig ist, auch für das folgende gilt. Es sei also jetzt beliebig irgend ein Punktepaar $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ mit der Determinante $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ gegeben. Offenbar muß auch einer der beiden Punkte $\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}$ und $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$ schon bestimmt sein, denn sonst könnten wir ja gar nicht die Punkte x und y erhalten haben. So z. B. gingen wir anfangs aus von den Punkten $0, 1$ und ∞, wo letzterer auch als

$\frac{0-1}{\infty-1}$ sich darstellt. Es sei $\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2}$ der bereits bestimmte Punkt. Wir finden dann, als harmonischen Punkt notwendig $\frac{x_1-y_1}{x_2-y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ als Ecke des nächsten Dreieckes. Da rückwärts $\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1+y_1}{z_2+y_2}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1+x_1}{z_2+x_2}$, so haben wir nur noch zu zeigen, daß $x_1 z_2 - z_1 x_2 = \pm 1$ und $y_1 z_2 - z_1 y_2 = \pm 1$ ist. Denn dann erfüllen die Punktepaare $(xz)/(yz)$ dieselben Bedingungen, die wir ursprünglich an (xy) stellten, und wir können also von ihnen ausgehend in gleicher Weise weitergehen. Sie sehen, wie einfach das ist.

Dies ist gerade das Schöne in der Zahlentheorie, man zerlegt die Behauptungen in kleine Teile, die Schritt für Schritt mit den einfachsten Mitteln bewiesen werden. Es ist in der That direkt:

$x_1 z_2 - z_1 x_2 = x_1(x_2 - y_2) - x_2(x_1 - y_1) = -x_1 y_2 + x_2 y_1 = \pm 1$ und

$y_1 z_2 - z_1 y_2 = y_1(x_2 - y_2) - y_2(x_1 - y_1) = +y_1 x_2 - y_2 x_1 = \pm 1$.

Wir haben uns höchstens nur noch klar zu machen, daß z_1 und z_2 zu einander teilerfremd sind. Dies aber ist sehr einfach nachzuweisen, wenn $x_1 z_2 - x_2 z_1 = \pm 1$ ist, so kann z_1 und z_2 keinen gemeinsamen Teiler haben, denn sonst müßte derselbe auch in ± 1 enthalten sein.

Dies wäre der Beweis des ersten Teils unserer Behauptung, daß alle Punkte, welche durch die in

Figur vorkommenden Kreisbogen konstruiert werden, wirklich das aufgestellte arithmetische Gesetz befriedigen. Wir werden jetzt den Nachweis der Richtigkeit des zweiten Teiles zu liefern haben, daß jedes Zahlenquadrupel, welches das arithmetische Gesetz befriedigt, wirklich zwei durch einen Kreisbogen unserer Figur verbundenen Punkten als Abscissen angehört. Wir gehen wieder schrittweise vor:

Wir werden zunächst nachweisen: Wenn in der Figur x vorkommt, so kommt auch $x+1$ vor. Man wird dies bei einer näheren Betrachtung der Figur leicht zugeben. Denn gehen wir in der Figur einmal aus von dem Dreieck $1,2\infty$, so werden wir stets Punkte erreichen, welche zu den von dem Dreieck 01∞ aus konstruierten Punkten in der Beziehung stehen, daß ihre Lage genau um 1 verschoben ist. Wir wollen unsere Behauptung jedoch noch genauer analytisch nachweisen. Wir sagten schon, wir kommen von den Punkten $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$, welche die Determinante $(x\ y) = \pm 1$ haben, ausgehend zu den Punkten $\frac{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2}$; denn diese Operation ist ja gerade das Gesetz, durch welches die ganze Reihe der Dreiecke konstruiert wird. Wir wollen nun annehmen, daß auch die Punkte $\frac{x_1}{x_2}+1$ und $\frac{y_1}{y_2}+1$ wirklich vorkommen, (deren Determinante in der That $= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ ist), und wollen dann nachweisen, daß wir erneut Punkte mit dem Vorsprung $+1$ erhalten, wenn wir von diesen Punkten aus zu den

benachbarten übergehen.

Wir schreiben $\frac{x_1 + x_2}{x_2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{y_2}$. Wir gehen nun zu den Nachbarpunkten über; dieselben sind dem allgemeinen Gesetz zufolge gegeben durch: $\frac{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}{x_2 \pm y_2}$. Dies können wir aber auch schreiben: $\frac{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2} + 1$. Wir haben also in der That die Abscissen der früher konstruierten Punkte $\frac{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2}$, nur um 1 vermehrt. q.e.d. Wir wollen übrigens bemerken, wir führen dies so ausführlich durch, weil wir bald zu ähnlichen, jedoch schwierigeren Betrachtungen kommen, an deren Schlussweisen wir dann bereits gewöhnt sein werden.

Zweitens behaupten wir, wenn x eine Ecke ist, so findet sich auch $-\frac{1}{x}$ in unserer Figur. Wir werden dies wieder zunächst bei einzelnen Beispielen als richtig erweisen. Wir haben, wie wir wissen, ein Dreieck gebildet von den Ecken -1, 0 und ∞. Von diesem ausgehend gelangen wir durch einmalige Spiegelung resp. Inversion zu den Punkten -2 und $-\frac{1}{2}$. Wenn wir auf die Punkte $-2, -1, -\frac{1}{2}$ nun unsere Behauptung anwenden, so müssen letzterer zufolge auch die Punkte $\frac{1}{2}, +1, +2$ vorkommen, was uns gleichfalls bereits bekannt ist. Für einzelne Ecken ist also unsere Behauptung hiermit als richtig nachgewiesen. Nun müssen wir uns überzeugen dass auch bei fortschreitendem Process dieselbe richtig

bleibt. Wir nehmen also an, der Satz sei als richtig befunden für die Punkte $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$, so daß auch die Punkte $-\frac{x_2}{x_1}$ und $-\frac{y_2}{y_1}$ in unserer Figur sicher vorkommen. Nun wollen wir sehen, ob auch für die entsprechenden Nachbarpunkte diese Beziehung bestehen bleibt. Wir erhalten die Nachbarpunkte wie bekannt durch:

$\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}$ und entspr. $\frac{-x_2 - y_2}{x_1 + y_1}$ resp. $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$ und entspr. $\frac{-x_2 + y_2}{x_1 - y_1}$.

Wir sehen, je zwei entsprechende Punkte stehen wieder in der Beziehung, daß wir nur Zähler und Nenner des einen Punktes zu vertauschen und ein Minuszeichen hinzuzufügen brauchen, um den anderen Punkt zu erhalten. Ist diese Beziehung aber für die Nachbarpunkte so geblieben, so wird sie allgemein auch für die folgenden Punkte gelten.

Hiermit haben wir denn sogar noch etwas mehr nachgewiesen, als wir anfangs ins Auge fassten. Unser Ergebnis werden wir zusammenfassen können in die Worte:

„Wir haben bewiesen, daß, wenn 3 Punkte die Ecken eines Dreiecks bilden, auch diejenigen Punkte die Ecken eines Dreiecks bilden, welche durch die Operation: $x' = x + 1$ aus den genannten dreien hervorgehen, und nicht minder diejenigen 3 Punkte ein

Dreieck bilden, die durch die Operation $x' = -\frac{1}{x}$ aus den genannten hervorgehen." Wir wollen die erste dieser beiden Operationen mit dem Buchstaben S, die zweite mit dem Buchstaben T kurz bezeichnen. Wir werden dann sagen: „Durch S wie durch T wird aus jedem Dreieck der Figur wieder ein Dreieck, das in der Figur vorkommt."

Nun wenn wir uns dies klar gemacht haben, möchten wir doch auch in arithmetisch geschlossener Form wissen, was dies überhaupt für Dreiecke sind, welche in unserer Figur vorkommen. Ja, da werden wir sagen, wir wollen doch einmal einige Male die Operation S auf ein Dreieck anwenden, dann wieder T, darauf wieder S u. s. w. Welches ist dann die allgemeinste Umformung, welche in dieser Figur an jedem Dreiecke der Figur wieder ein Dreieck der Figur entstehen läßt? Wir wollen auch hier wieder zuerst das Resultat selbst aufstellen und dann den Beweis für dasselbe bringen. Ersichtlich geben S und T zusammengesetzt immer eine lineare Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ mit ganzzahligen Coefficienten und der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Ich behaupte nun umgekehrt:

Jede derartige lineare Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ kann aus den Operationen S und T durch

Wiederholung und Kombination zusammengesetzt werden. Hieraus folgt dann: Die Beziehung $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ (wo $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$) gibt uns die allgemeinste Substitution, welche ein Dreieck in ein beliebiges andere überführt

Wir führen den Nachweis mit Hülfe der Kettenbrüche. Wir nehmen an, es sei $\alpha \geq \gamma$. (Der Fall $\alpha < \gamma$ wird, wie wir sofort sehen werden, bei dieser Annahme zugleich mit erledigt). Außerdem möge γ positiv sein.

Wir wollen dann setzen:

1) $\alpha x + \beta = n_0(\gamma x + \delta) - (\alpha_1 x + \beta_1)$, wo $0 \leqq \alpha_1$ *) $< \gamma$ sein soll.

Wir wollen dann weiter $\gamma x + \delta$ durch $\alpha_1 x + \beta_1$ dividieren und bekommen:

2) $\gamma x + \delta = n_1(\alpha_1 x + \beta_1) - (\gamma_1 x + \delta_1)$, wo $0 \leqq \gamma_1 < \alpha_1$.

Wir gehen entsprechend weiter und erhalten:

3) $\alpha_1 x + \beta_1 = n_1(\gamma_1 x + \delta_1) - (\alpha_2 x + \beta_2)$, wo $0 \leqq \alpha_2 < \gamma_1$;

4) $\gamma_1 x + \delta_1 = n_2(\alpha_2 x + \beta_2) - (\gamma_2 x + \delta_2)$, wo $0 \leqq \gamma_2 < \alpha_2$ ist.

Wir erkennen, wenn wir in dieser Weise fortfahren, so werden die (positiven) Zahlen $\alpha, \gamma, \alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2 \ldots$ ..... u.s.w. immer kleiner und kleiner, bis wir schließlich als Coefficienten des x in dem zweiten Glied auf der rechten Seite einer solchen Gleichung den Wert 0 erhalten. Wir müssen also schließlich auf einen Ausdruck kommen, mag

*) Es kann allerdings α_1 auch $= 0$ sein, dann jedoch wären wir bereits am Ende unserer Entwickelung. Entsprechendes gilt

es nun $\alpha_q x + \beta_q$ oder $\gamma_q x + \delta_q$ sein, wo α_q resp. γ_q verschwindet, wir also nur noch eine Constante, die wir vorläufig mit d bezeichnen, vor uns haben. Diese so aufgestellten Gleichungen wollen wir nun benutzen, um den Ausdruck $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ umzuformen.

Wir können zunächst folgendermaßen schreiben:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = n_0 - \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma x + \delta} = n_0 - \frac{1}{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha_1 x + \beta_1}}.$$ Auf den

Quotienten des Nenners wenden wir weiter die Gl. 2. an und erhalten:

$$x' = n_0 - \frac{1}{m_0 - \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{\alpha_1 x + \beta_1}} = n_0 - \frac{1}{m_0 - \frac{1}{\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}\right)}}.$$ Auf

den eingeklammerten Bruch wenden wir dann die Gl. 3. an, so daß sich ergiebt:

$$x' = n_0 - \frac{1}{m_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{\gamma_1 x + \delta_2}}} = n_0 - \frac{1}{m_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1 x + \delta_1}{\alpha_2 x + \beta_2}\right)}}}.$$

Wir wenden in derselben Weise die Gl. 4, hierauf 5 u. s. w. an, bis die Entwickelung schließlich abbricht. Dann haben wir schließlich die Form:

$$x' = n_0 - \cfrac{1}{m_0 - \cfrac{1}{n_1 - \cfrac{1}{m_1 - \cfrac{1}{n_2 - \cfrac{1}{m_2 - \cdots - \cfrac{1}{n_r - \cfrac{1}{\left(\frac{ax+b}{d}\right)}}}}}}}.$$

(wo wir als den letzten Buchstaben, der dem Ausdruck $\frac{1}{\frac{ax+b}{c}}$ vorausgeht, m_x geschrieben haben, es könnte ebensowohl m_7 sein!).

Der schließliche Quotient $\frac{ax+b}{c}$ in der Entwicklung läßt sich nun noch wesentlich vereinfachen. Als Determinante des ersten Quotienten $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ hatten wir $\alpha\delta-\beta\gamma$ bezeichnet und dies gleich 1 vorausgesetzt. Als Determinante des zweiten auftretenden Ausdruckes $\frac{\gamma x+\delta}{\alpha_1 x+\beta_1}$ war den wir entsprechend $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1$ bezeichnen, ebenso als Determinante des dritten Quotienten der Entwicklung $\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1$ u. s. w. Die Determinante des letzten Quotienten ist dann einfach ad. Die aufeinander folgenden Determinanten wollen wir nun berechnen. Aus Gl. 1 der pag. 332 folgt zunächst, daß $\alpha_1=n_0\gamma-\alpha;\ \beta_1=n_0\delta-\beta$ ist. Setzen wir diese Werte in die zweite Determinante $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1=1$ ein, so kommt: $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1=n_0\gamma\delta-\beta\gamma-n_0\gamma\delta+\alpha\delta=\alpha\delta-\beta\gamma=1$. In derselben Weise werden wir schrittweise weiterschließend für alle folgenden Determinanten den Wert 1 finden. Wir haben so den Satz gefunden:

„Die Determinanten der verschiedenen linearen Ausdrücke, welche hinter einander in unseren Formeln auftreten, sind alle gleich 1."

Also gilt auch für unseren letzten Ausdruck: $ad=1$. Hieraus folgt, daß $a=\pm1$, $d=\pm1$ ist, wo wir das + Zeichen wählen, was uns natürlich frei steht.

Unser Kettenbruch nimmt daher die Gestalt an:

$$x' = n_0 - \cfrac{1}{m_0 - \cfrac{1}{n_1 - \cfrac{1}{m_1 - \cfrac{1}{n_2 - \ddots - \cfrac{1}{n_\nu - \cfrac{1}{x+b}}}}}}$$

In Worten sagt dies Ergebnis:

„Wir haben so den Ausdruck $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ in ganz bestimmter Weise in einen schließlich abbrechenden Kettenbruch zerlegt." Wir behaupten nun:

„Diese Entwicklung besagt gar nichts anderes als dies: Wir haben die Operation $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ aus den S und T durch Kombination und Wiederholung erzeugt."

Und dies ist ja gerade das, was wir zeigen wollten. Der Nachweis dieser Behauptung ist sehr einfach; wir brauchen nur von unten beginnend die einzelnen Operationen, die der Kettenbruch angiebt zu betrachten. Zunächst ist aus x geworden $x+b$, dies ist aber genau dasselbe als wenn wir die Operation S $b$mal hinter einander auf x angewendet hätten. Dann machen wir aus $x+b$: $-\frac{1}{x+b}$. Dies ist aber die Operation T, auf $x+b$ angewandt. Zu $-\frac{1}{x+b}$ addieren wir darauf n_ν, wir erhalten also $n_\nu - \frac{1}{x+b}$, dies besagt aber wieder, ich wende die Operation S^{n_ν} mal an. Hierauf folgt wieder die

Operation S, dann in bestimmter Zahl die Operation S nochmals, u. s. w. Wir können daher den ganzen Kettenbruch symbolisch auch schreiben:

$$x' = S^{m_0} T S^{m_1} T S^{m_2} T S^{m_3} \ldots\ldots S^{m_{r-1}} T S^{m_r} (x).$$

Hierin ist aber gerade ausgesprochen, was wir behauptet hatten, daß nämlich das x' aus dem x durch eine ganz bestimmte Wiederholung und Kombination der Operationen S und T hervorgeht.

Nun hatten wir aber in voriger Stunde gesehen, daß, wenn in unserer Figur irgend ein Paar von Punkten durch einen Halbkreis verbunden ist, daß dann auch dasjenige Paar durch einen Halbkreis verbunden wird, welches durch die Operation S und T in beliebiger Wiederholung und Aufeinanderfolge aus dem ersteren hervorgeht. Wir können daher in Rücksicht auf unseren letzten Satz sofort als Folgerung aufstellen:

Wenn irgend zwei Punkte in unserer Figur durch einen Halbkreis verbunden sind, dann sind auch diejenigen durch einen Halbkreis verbunden, welche aus den ersten beiden durch eine Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ hervorgehen, unter $\alpha \beta \gamma \delta$ ganze Zahlen von der Determinante 1 verstanden.

Von diesem so genommenen Satze machen wir nun eine Anwendung. Wir wissen, die Punkte $x = \infty$

und $x=0$ sind sicher durch einen Halbkreis verbunden. Setzen wir diese Werte in obige Substitution ein, so kommt:
$x' = \frac{\alpha}{\gamma}$, und $x' = \frac{\beta}{\gamma}$. Dies besagt:

„Der Punkt $x=\frac{\alpha}{\gamma}$ und der Punkt $y=\frac{\beta}{\gamma}$ sind durch einen Halbkreis verbunden, unter $\alpha\beta\gamma\delta$ irgend 4 ganze Zahlen von der Determinante 1 verstanden."

Wir haben hiermit den zweiten Teil unserer Behauptung auf pag. 324 bewiesen. Wir hatten dort für die Punkte x und y gesetzt: $x = \frac{\pm x_1}{\pm x_2}$, $y = \frac{\pm y_1}{\pm y_2}$ und behauptet, daß für x_1, x_2, y_1, y_2 irgend 4 ganze Zahlen eintreten können, für die $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ ist. Dies aber ist direct im letzten Satze enthalten; die $\pm$ Zeichen haben weiter keine principielle Bedeutung.

Wir erkennen insbesondere sogleich, daß jeder rationale Punkt der Geraden AB in unserer Figur erreicht wird. Denn $x = \frac{\alpha}{\gamma}$ drückt ja jeden dieser Punkte aus, α und γ als beliebige teilerfremde Zahlen genommen.

Hiermit ist der Teil unserer Untersuchung beendet, der sich mit der Betrachtung der Figur aus der Theorie der Modulfunktionen unter Zugrundelegung der gewöhnlichen Maassgeometrie beschäftigen sollte.

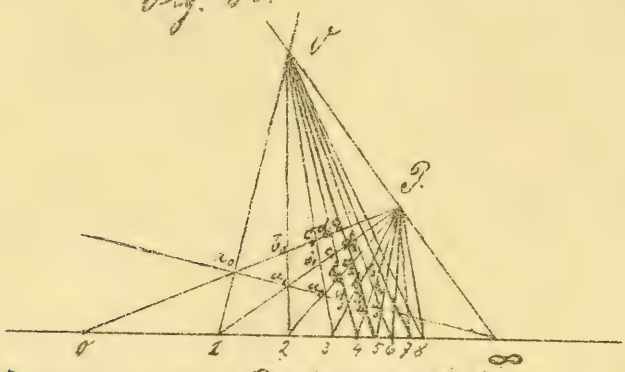
Nun wollen wir sehen, wie wir auf einem Grundgebilde erster Stufe rein projektivisch verfahrend eine Skala festlegen können, indem wir die Figur der Modulfunktionen uns dabei als Modell vor Augen halten (um zu wissen, in welcher Reihenfolge die verschiedenen harmonischen Elemente aufzusuchen sind.) An Grundgebilden erster Stufe kommen in der Ebene in Betracht: das Strahlbüschel und die gerade Punktreihe. Da wir nur in einem begrenzten Raumteil operieren, so ist zwar das Strahlenbüschel unbegrenzt, die gerade Linie, die Punktreihe, hört dagegen auf, wo sie die Begrenzung trifft. Es wäre daher richtiger, für das Strahlbüschel die Skala aufzustellen; doch ist es der Ausdrucksweise halber bequemer zunächst die gerade Linie zu wählen. Wir wollen daher uns jetzt die Aufgabe stellen, in der angegebenen Weise auf der geraden Linie eine Skala zu konstruieren. Es seien drei Punkte als $0, 1, \infty$ gegeben, von denen wir ausgehen wollen. Wir werden zunächst mit Hülfe der Vierseitskonstruktion die ganzzahligen Punkte, d.h. die Punkte konstruieren, welche jetzt ganzzahlige Abscissen erhalten. Wir wissen, wie dies geschieht. Wir ziehen durch $0, 1$ und ∞ je eine gerade Linie (vergl. Figur.). Wir erhalten so die Punkte O, P und a_0. In diesem Vierseit ziehen wir die Diagonalen von a_0 nach ∞

und von P nach 1 hin. Dies giebt uns den Punkt a_1. Ziehen wir dann Oa_1, so liefert uns diese Gerade als Schnitt den Punkt 2. Diese ganze Konstruktion ist uns ja bereits bekannt. Nun werden wir in analoger Weise aus den Punkten 1, 2 und ∞ den Punkt 3 konstruieren. Doch werden wir dabei die sich uns bietende Vereinfachung benutzen, möglichst bereits vorhandene Linien zu verwerten. Es sind dies die Linien 1 P, 2 O, ∞ J. Im übrigen verfahren wir, wie vorhin, wir ziehen 2 P und erhalten so den Punkt a_2, den wir mit O verbinden. Dies führt uns zu dem Punkte 3. Wir erkennen, daß wir hiermit einen Schematismus für die Konstruktion gewonnen haben, den wir weiter benutzen werden. Wir verbinden 3 mit P, erhalten a_3, ziehen a_3 O und erhalten so den Punkt 4. Entsprechend finden wir 5, 6, J. u. s. w. Natürlich können wir auch nach links hin die Punkte −1, −2 ..... aufsuchen. Wir haben so alle ganzzahligen Punkte konstruiert. Die Skala ist damit so weit hergestellt, als wenn man etwa auf einem Meterstab die ganzen Centimeter bezeichnet hat, ohne die halben Centimeter oder die einzelnen Millimeter.

Wir gehen jetzt dazu über die halbzahligen Punkte zu konstruieren, d. h. die Punkte, deren Abscisse gleich $1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ u. s. w. zu setzen ist. Dies kann auf sehr

verschiedene Weise unter Benutzung der Figur, die wir bereits haben, geschehen.

Fig. 80.



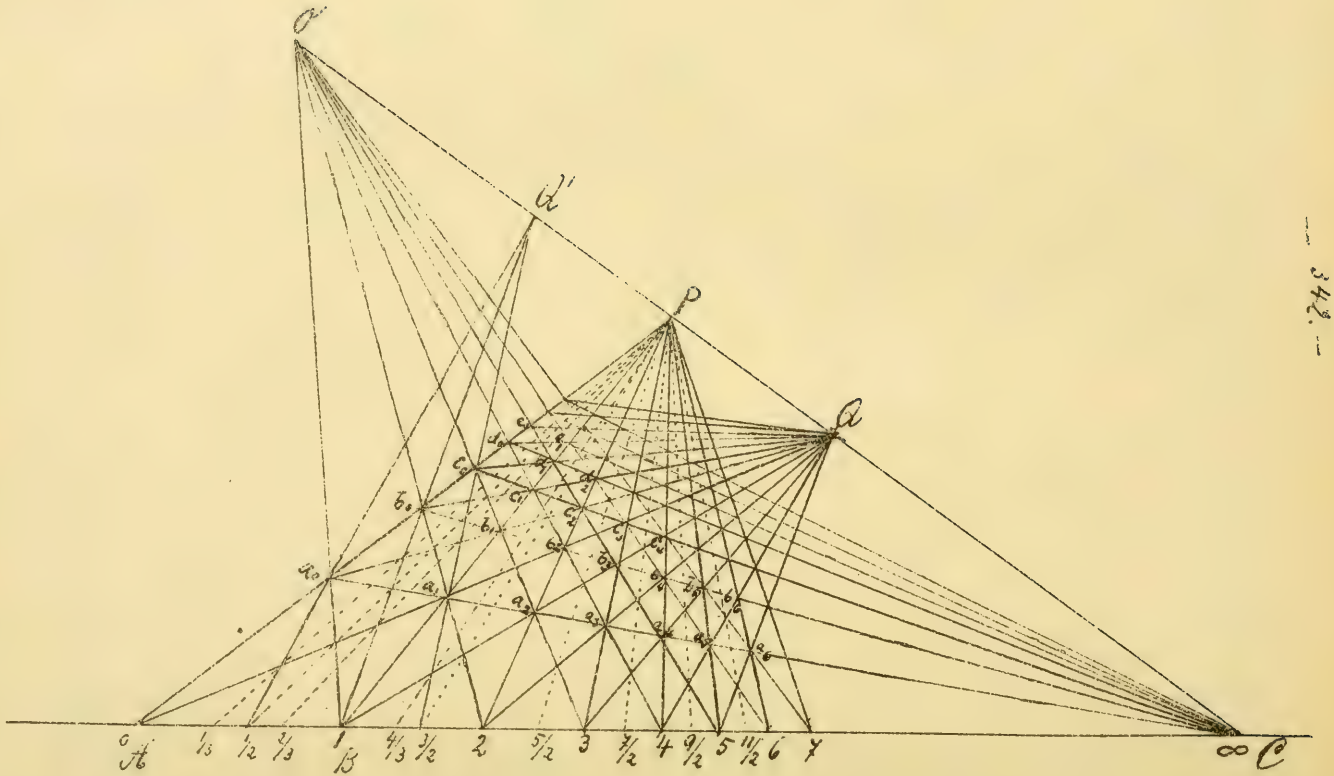
Wir können von den Punkten b_0, b_1, b_2 u.s.w. ausgehen, aber auch von den Punkten c_0, c_1, c_2 u.s.w. Doch kommen natürlich beide Wege, wie wir leicht direkt nachweisen, auf dasselbe hinaus. Wir wollen uns zunächst überzeugen, daß die Punkte b_0, b_1, b_2 u.s.w. auf einer graden Linie liegen, die durch den Punkt ∞ hindurchgeht. Es wird dies hinlänglich dargethan sein, wenn wir zeigen, daß die Verbindungslinie $b_0 \infty$ auch durch den Punkt b_1 hindurchgeht.

Dies aber ist sehr einfach. Wir wissen zunächst, daß $1 a_1 b_1 P$ ein harmonisches Quadrupel bilden, da diese Punkte von O aus auf 123∞ projiciert werden. Nun bilden aber auch $O a_0 b_0 P$ ein harmonisches Quadrupel, da sie von O aus auf $0, 1, 2, \infty$ projiciert werden. Hieraus folgt unmittelbar, daß $b_0 \infty$ auch durch b_1 (und weiterhin auch durch $b_2 b_3$ u.s.w.) gehen muß, da ja auch die 4 Strahlen

$\overline{1\infty}$, $\overline{a_0\infty}$, $\overline{b_0\infty}$, $P\infty$ ein harmonisches Quadrupel bilden. In ganz analoger Weise läßt sich zeigen daß $c_0 c_1$ u. s. w. auf einer durch ∞ gehenden geraden Linie liegen, u. so fort. Wir erkennen weiter jedoch, daß auch die Punkte $0, a_1, b_2, c_3$ u. s. w. ebenso a_0, b_1, c_2, d_3, u. s. w. u. s. w. auf geraden Linien liegen. Auch dies ist leicht zu zeigen. Wir wollen z. B. einmal die Punkte $a_0 b_1 c_2$ u. s. w. ins Auge fassen. Offenbar können wir die Strahlbüschel in P und ∞ als projektiv ansehen der Art, daß allemal die Strahlen, die durch a_0, b_1, c_2 etc. gehen, einander entsprechen. Denn das Strahlbüschel in ∞ wird von 2∞ in den Punkten $a_0 b_0 c_0 \ldots$, das Strahlbüschel in P von $a_0\infty$ in den Punkten $a_0 a_1 a_2$ u. s. w. geschnitten, also in 2 Punktreihen, die in Bezug auf 0 perspektivisch sind. Da aber die so einander projektiv zugeordneten Strahlenbüschel in P und ∞ den Strahl $P\infty$ entsprechend gemein haben, so sind sie perspektiv zu einander, also liegen die Schnittpunkte $a_0 b_1 c_2 \ldots$ auf gerader Linie. Zugleich ergiebt sich aus diesem Beweis, daß die geraden Linien, $a_0 b_1 c_2 \ldots$, $b_0 c_1 d_2 \ldots$ u. s. w. ein Strahlbüschel bilden, dessen Träger A auf 0∞ liegt.

Nachdem wir uns diese Verhältnisse klar gemacht haben, wird es uns leicht sein, die Punkte $1/2$ $3/2$ $5/2$ u. s. w. zu bestimmen. Wir ziehen einfach von P aus die Strahlen

Fig. 81.



durch die noch freien Kreuzungspunkte der Strahlbüschel O und Q', die natürlich wieder entsprechend auf geraden Linien liegen, und erhalten hiermit sofort die gewünschten Punkte 1/2 3/2 5/2 ..... Wir erkennen weiter auch, daß die erwähnten Kreuzungspunkte anders angeordnet auf Strahlen des Büschels in ∞ liegen. Alle diese Lagenbeziehungen lassen sich natürlich im einzelnen auf die Viereckskonstruktion zurückführen. Wir wollen sie z. B darlegen für den Punkt 1/2, woraus zugleich ersichtlich sein wird, daß wirklich wir diesem Punkt den Zahlenwert 1/2 beilegen müssen. Wir betrachten die 4 Strahlen O P, O a, und 1 P, 1 a$_0$. Diese bilden ein Viereck, dessen Diagonalen gerade durch ∞ und 1/2 gehen. In der That sind so die Punkte 0, 1/2, 1, ∞ als ein harmonisches Quadrupel erwiesen.

Wir wollen jetzt noch andeuten, wie wir des weiteren die dritzähligen Punkte 1/3, 2/3 | 4/3, 5/3 | 7/3, 8/3 | u. s. w. konstruieren können. Wir ziehen die Linien 1/2 a$_0$, 1 a$_0$, 3/2 a$_1$, a$_0$ u. s. w.; dieselben bilden ein Strahlbüschel, dessen Träger Q' ist und wieder auf O ∞ liegt. Die von entsprechenden Kreuzungspunkten verbinden wir wieder mit P und erhalten so die verlangten Punkte, wie im einzelnen leicht zu zeigen ist.

In analoger Weise werden wir fortfahren, indem wir uns, was die Aufeinanderfolge der zu konstruierenden Punkte angeht, an das Vorbild der Figur der Modul-

Funktionen halten. Wir haben so unseren Zielpunkt erreicht. Unser Resultat ist also:

„Wir konstruieren uns in der angegebenen Weise auf der geraden Linie eine projektive Skala, d. h. wir ordnen wirklich jedem Punkte (das Wort in idealisiertem Sinne genommen) der geraden Linie einen bestimmten Zahlenwerth zu, der entweder unmittelbar rational ist, oder schließlich als Grenze einer ∞ Reihe rationaler Zahlen als irrational definiert werden muß."

Wollten wir dieses nun umkehren, indem wir sagen: „Zu jedem Zahlenwert gehört ein Punkt", so ist dies natürlich nicht richtig, da wir ja nur ein begrenztes Stück der geraden Linie betrachtet haben. Wohl aber können wir von einem Strahlenbüschel, welches ja auch in dem begrenzten Raume unbegrenzt ist, sagen:

„Legen wir ein unbegrenztes Grundgebilde erster Stufe, also ein Strahlbüschel der Konstruktion zu Grunde, so werden wir für jeden reellen Skalenwert von x, den ich vorschreiben mag, auch ein zugehöriges geometrisches Element im Strahlbüschel vorfinden."

Wir haben jetzt den zweiten Punkt unserer Behauptung zu beweisen, der sich bei der Aufstellung einer Skala mit Hilfe der Viereckskonstruktion darbietet. Wir hatten gesagt: Wenn wir von drei anderen Punkten A', B', C ausgehend, denen wir entsprechend die Werte $x' = 0, 1, \infty$ beilegen eine

neue Skala auf unserer Geraden konstruieren, so steht x' zu den früheren x in der Beziehung $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$. Diese Behauptung deckt sich völlig mit der umgekehrten: Wir können an Stelle von ABC drei Punkte $A'B'C'$ stets so finden, daß ein angegebener linearer Zusammenhang $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ herauskommt. *) Die eine Behauptung ist so gut wie die andere, da wir beide Male gleich viel willkürliche Größen haben. Im ersten Falle können wir die drei neuen Punkte A, B, C, im letzteren die Verhältnisse $a:b:c:d$ beliebig annehmen.

Wenn wir also den Verhältnissen $a:b:c:d$ einen anderen Wert beilegen, so werden jedesmal auch die Punkte A', B', C' andere werden. Wir können uns daher darauf beschränken zu beweisen, daß wir die drei Punkte ABC stets so verschieben können, daß in Bezug auf sie als die neuen Ausgangspunkte zur Konstruktion der Skala $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ wird, wo das Verhältnis der Konstanten $a:b:c:d$ als gegeben anzusehen ist. Wir werden hier 2 Fälle zu unterscheiden haben, den ersten Fall, wo die Konstanten a, b, c, d commensurabel sind und den zweiten Fall, wo die Konstanten a, b, c, d incommensurabel sind. Man wird verstehen

*) Ausgeschlossen bleiben aus leicht ersichtlichen Gründen nur diejenigen Ausdrücke $\frac{ax+b}{cx+d}$, deren Determinante $ad - bc$ verschwindet (bei denen also Zähler und Nenner proportional sind.)

dass wir nur den ersten Teil ausführlich zu behandeln haben, während wir den zweiten Teil dann durch ein Grenzverfahren (Exhaustionsverfahren im Sinne Euklids) erledigen können. Wir werden uns daher auf den ersten Fall beschränken. Wenn nun a, b, c, d commensurabel sind, dann können wir sie natürlich ganzzahlig annehmen und zwar ohne einen allen gemeinsamen Teiler, da es ja nur auf die Verhältnisse dieser 4 Größen ankommt. Es ist demnach $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, unter a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler verstanden, von der Determinante $ad - bc = \pm N$, wo N dann auch eine ganze Zahl bezeichnet, die positiv sein soll. Wir wollen nun beweisen, dass wir unsere Coordinatengrundpunkte so abändern können, dass das neue Coordinatensystem x' mit dem alten System der x gerade in dieser Beziehung steht. Natürlich müssen wir den Beweis führen, ohne andere Hülfsmittel als die, welche in unserer Skalenkonstruktion selbst liegen. Wir fassen nun diese Aufgabe mit einem Gedanken an, der uns von der vorletzten Stunde bereits geläufig ist. Wir werden sagen, jede solche lineare Abhängigkeit lässt sich aus bestimmten einfachen Formeln durch Kombination und Wiederholung erzeugen. Wir denken hierbei daran, dass wir in der vorletzten Stunde von der Formel ausgingen: $x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ war und zeigten, dass jede

solche Substitution sich zusammen läßt aus den einfachsten S (oder $x' = x+1$) und T (oder $x' = -\frac{1}{x}$). Wir wollen uns nun zunächst arithmetisch überzeugen, daß auch unsere Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ sich aus ähnlichen Substitutionen zusammensetzen läßt, und zwar behaupte ich, daß unsere Formel sich auf die 4 Operationen zurückführen läßt:
1.) S oder $x' = x+1$; 2.) T oder $x' = -\frac{1}{x}$; 3.) U oder $x' = -x$;
4.) V oder $x' = \frac{x}{n}$, wo n eine positive ganze Zahl sein soll.

Mit der Operation U können wir zunächst sicher erreichen, daß die Determinante unserer Substitution positiv ist. Wenn nämlich $ad - bc = -N$ ist, so können wir doch schreiben: $x' = -\frac{-ax-b}{cx+d}$; dies aber können wir deuten: $x' = -x''$, wo $x'' = \frac{-ax-b}{cx+d}$ zu setzen ist; letzteres ist aber eine lineare Substitution mit positiver Determinante N und $x' = -x''$ ist die Operation U.

Wir nehmen nun des weiteren an, es sei eine Substitution $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit positiver Determinante $ad - bc = +N$ gegeben. Wir wollen jetzt zeigen, wie diese sich aus den 3 Operationen S T V kombinieren läßt. Wir nehmen an, c und d haben als größten gemeinschaftlichen Teiler n, so daß wir setzen können: $c = n.\gamma$, $d = n.\delta$, wo γ, δ teilerfremd sind.

Dann schreibt sich unsere Formel: $x' = \frac{ax+b}{n(\gamma x+\delta)}$.
Nun sagen wir, wir wollen uns 2 Zahlen α und β suchen,

so daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Solche Zahlen werden immer und zwar auf ganz elementarem Wege zu finden sein, da γ und δ teilerfremd sind. Dann aber wird man setzen dürfen:

$a = m\cdot\alpha + \nu\cdot\gamma$; $b = m\cdot\beta + \nu\cdot\delta$, unter m und ν zwei ganze Zahlen verstanden. Lösen wir nämlich diese beiden linearen Gl. nach m und ν als Unbekannten auf, so kommt im Nenner für m und ν die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ zu stehen, die ja $= 1$ ist. Also erhalten wir wirklich ganze Zahlen für m und ν. Führen wir diese Ausdrücke in unsere Formel ein, so wird:

$$x' = \frac{m\cdot(\alpha x + \beta) + \nu\cdot(\gamma x + \delta)}{n\cdot(\gamma x + \delta)} = \frac{m\cdot\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + \nu}{n}.$$

In dieser letzten Formel haben wir aber den Beweis, um den es sich handelt, vor Augen stehen. Es geht nämlich x' aus x folgendermaßen hervor. Wir werden zunächst setzen $x'' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$, diese Substitution stellt aber, wie wir wissen, nur eine Kombination der Operationen S und T dar. Dann werden wir weiter setzen $\frac{x'''}{m} = x''$, wir sehen hierin die Anwendung einer Operation V, ferner sei $x^{IV} = x^{III} + \nu$, welches uns eine ν malige Wiederholung der Operation S anzeigt, dann endlich $x' = \frac{x^{IV}}{n}$, abermals die Anwendung einer Operation V. Wir haben hiermit also bewiesen, was wir wollten, daß in der That jede ganzzahlige Substitution mit positiver Determinante sich

durch Wiederholung und Kombination der 3 Operationen S, T, V herstellen läßt.

Hiermit haben wir den schwierigsten Teil der Betrachtung erledigt. Wir brauchen jetzt nur noch den geometrischen Beweis zu erbringen, daß wir durch neue Wahl der 3 Grundpunkte A, B, C die Skalenwerte der einzelnen Punkte so verändern können, daß wir die Substitution S, T, U und V zwischen den neuen und alten Abscissen bekommen. Bei den drei ersten Operationen ist dies sehr leicht nachzuweisen. Wählen wir z.B. als neue Grundpunkte A', B', C' die Punkte $x = -1, 0, \infty$, denen wir jetzt also die Werte $x' = 0, 1, \infty$ zuerteilen. Wir wollen dann von diesen Punkten ausgehend bei der Konstruktion der Skala genau so verfahren wie es in der letzten Stunde geschehen war. v. Fig. 81. Wir bemerken aber sofort, daß wir dann die frühere Figur selber gar nicht zu ändern brauchen, indem alle Punkte, die zu konstruieren nötig sind, bereits in der Figur enthalten sind. Es werden daher nur die Benennungen der Punkte geändert, wobei direkt der Punkt x herausspringt $x' = x + 1$, indem die alte Numerierung um 1 gegen die neue zurücksteht. (Man erinnere sich der Ueberlegung von pag. 329.).

Nun wenden wir uns zu den Operationen T und U. Wir können auch hier sagen: Genau wie bei der Operation S ist es bei den Operationen T und U, stark bei den Operationen T und U brauchen wir gar keine

neue Figur zu machen, sondern wir werden nur neue Zahlen zu der alten Figur hinzuzunehmen brauchen.

Um nämlich T zu erhalten, wollen wir A', B', C' nach den Punkten $x = \infty, -1, 0$ legen. Wenn wir dann wie bisher die harmonischen Punkte konstruieren, so wird jetzt eben die Benennung so umgeändert sein, daß jetzt ∞' wird, was 0 war, -1, was $+1$ war, allgemein $x' = -\frac{1}{x}$, was x war. (vergl. pag. 329). Ebenso einfach ist es bei U. Wir werden die Punkte A', B', C' nach den Punkten $x' = 0, -1, \infty$ verlegen. Wieder wird die alte Figur unverändert gelten, nur sind die beigeschriebenen Abscissenwerte zu ändern, indem an Stelle von x eben $x' = -x$ zu treten hat.

Bei der vierten Operation V jedoch ist die Sache komplizierter. Wir werden wieder unsere Figur 81 zu betrachten haben. Wenn wir jetzt A', B', C' nach den Punkten $x = 0, \infty, \infty$ legen, und dann die Vierseite konstruieren, so giebt es neue Vierseite, die bisher in der Figur nicht vorkamen, und es bedarf einiger Ueberlegung, um zu sehen, daß die neuen Vierseite sich gerade aus den Querlinien $O\,Q,\ a_1 Q,\ b_1 Q$ u.s.w. so zusammensetzen lassen, daß infolge dessen diejenigen Skalenpunkte, die wir jetzt erhalten, immer mit früher bestimmten Punkten zusammenfallen, mit dem Unterschied jedoch, daß die neuen Abscissen x' gleich

dem $\frac{1}{n}$ fachen der früheren x' werden. Wir wollen dies an unserer Figur im einzelnen wirklich nachweisen für $n=2$ und $n=3$ und zwar für die ganzzahligen und halbzahligen Skalenpunkte. Im ersteren Falle ($n=2$) legen wir die Punkte A', B', C' nach den Punkten $x=0, 2, \infty$, so daß diese also jetzt die Abscissen $0, 1, \infty$ bekommen. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß für die ganzzahligen Punkte der neuen Skala in der That das Gesetz gilt $x'=\frac{x}{2}$. Es muß also der Punkt $x'=2$ nach dem Punkte $x=4$, der Punkt $x'=3$ nach dem Punkte $x'=6$ u. s. w. fallen. Dies ist aber sehr leicht zu zeigen.

Wir werden (v. Fig. 81.) zur Konstruktion der ganzzahligen Punkte einfach die Linie der b unter Festhaltung der Punkte 0 und ∞ an Stelle der Linie der a benutzen, indem wir als erstes Viereck wählen die Strahlen $0\infty, 2b, 0P$, und 0∞ und dann in der Zickzacklinie $0\,b_0\,2\,b_2\,4\,b_4$ u. s. w. uns bewegen. Hieraus aber folgt unmittelbar das Gesetz $x'=\frac{x}{2}$ für ganzzahlige Werte des x'. Nun wollen wir uns überzeugen, daß entsprechend diejenigen Punkte, die in der alten Skala mit $1, 3, 5$ u. s. w. bezeichnet sind, jetzt bei der neuen Konstruktion die Werte $1/2', 3/2', 5/2'$ ..... erhalten. Auch dies ist unmittelbar aus unserer Figur zu ersehen, indem wir unser Augenmerk auf die Querlinien $0\,b_2, 2\,b_4, 4\,b_6$ u. s. w. richten, die wir zur Konstruktion der Punkte $1/2', 3/2', 5/2'$ zu ziehen

haben. Wir erkennen also, daß auch für die halbzahligen Punkte das Gesetz $x' = \frac{x}{2}$ gilt.

Wir wollen nun das Gleiche noch für $n=3$ nachweisen. Wir haben als Grundpunkte zu wählen die Punkte $x = 0, 3, \infty$, denen wir jetzt die Abscissen $x' = 0, 1, \infty$ zuerteilen. Wir wollen zunächst wieder zeigen, daß für alle ganzzahligen Punkte x' das Gesetz gilt: $x' = \frac{x}{3}$. Wir werden nämlich zur Konstruktion der ganzzahligen Punkte jetzt einfach die Linie der c gebrauchen. Die entsprechende Zickzacklinie, welche die ganzzahligen Punkte auf der geraden Linie bestimmt, wird dann gegeben durch den Linienzug $0 C_0 3 C_3 6$ u.s.w. Wir sehen sofort, daß hiernach die Abscisse $x=6$ jetzt $x'=2$ bekommt, daß allgemein für ganzzahlige x' gilt $x' = \frac{x}{3}$. Jetzt wollen wir das Gleiche wieder für die halbzahligen Punkte nachweisen. Wir wollen zeigen, daß die Punkte $x = 3/2\ 9/2, 15/2$ ..... jetzt die Werte $x' = 1/2', 3/2', 5/2'$ ..... bekommen. Wir benutzen ganz einfach zur Konstruktion derselben wieder die Querlinien $0 C_3$, $3 C_6$ u.s.w. die unmittelbar zu den Punkten $3/2, 9/2$ u.s.w. hinführen. Z.B. entsteht der Punkt $3/2$ oder $1/2'$ als Schnittpunkt des Strahles, den wir von P durch den Durchkreuzungspunkt von $0 C_3$ und $3 C_6$ ziehen. Hierdurch ist auch für die halbzahligen Punkte x' die Gültigkeit des Gesetzes $x' = \frac{x}{3}$ aus unserer Konstruktion erwiesen.

Wenn man will, kann man diese Verhältnisse noch genauer im Einzelnen verfolgen. Wir werden heute zunächst noch zu dem Punkte c (pag. 289). einige Bemerkungen zu machen haben. Dieser Punkt betraf das System der Analysis oder der analytischen Geometrie, bei dem wir damit begannen, n unabhängige Variable anzunehmen, und bestimmte Gruppen von Transformationen zu Grunde legten. Ich will nur noch eine persönliche Bemerkung hinzufügen. Es handelt sich in dem bereits erwähnten Erlanger Programm, (wie in dem Programm selbst angegeben) um Anschauungen, die ich im persönlichen Verkehr mit Lie (jetzt Prof. in Leipzig, früher in Christiania) entwickelt habe. Lie der sich besonders mit den Transformationsgruppen beschäftigt hat, hat eine ganze Theorie derselben ausgebildet, die in einem größeren Werke ihre Darstellung findet. „Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet von Lie und Engel. Bd. I. 1888; Bd. II. 1890. Ausserdem wird noch ein dritter Band erscheinen, wohl nicht in allzu ferner Zeit. Es kann natürlich gar nicht daran zu denken sein, auf den Inhalt dieser Theorien von Lie jetzt irgendwie einzugehen. Das Gebiet, das wir hier vor uns sehen, ist ebenso ausgedehnt als ohne Zweifel wichtig und wird vielleicht einmal in einer Specialvorlesung uns zu beschäftigen haben.

Die Bemerkung zum Punkte c möge sich darauf beschränken, auf die Lie'schen Arbeiten aufmerksam gemacht zu haben.

Damit haben wir jetzt den Cursus durchlaufen, der die Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie darstellen sollte. Ich will die Vorlesung damit schließen, noch einige Worte über die geometrische Anschauung und die Axiome der Geometrie zu sagen.

Sie werden zuerst fragen, was sind „Axiome der Geometrie in der gewöhnlichen Auffassung?

Hierüber besteht folgende Ansicht: Man sagt, die Axiome seien solche Tatsachen der Anschauung formulieren, die wegen ihres primitiven Charakters nicht weiter bewiesen werden können, da sie ohne weiteres uns gegeben sind, sie sollen gleichzeitig das Wesen der Anschauung erschöpfen. Alle geometrischen Beweise sollen nun der Art sein, daß sie in logischer Kette von Folgerungen und Schlüssen auf die so an die Spitze gestellten Sätze zurückführen und zwar so, daß es in der Geometrie gar nicht mehr nötig ist, an die Anschauung zu appellieren. Alles, was wir von der Anschauung etwa brauchen, ist gleichsam protokollarisch in den Axiomen niedergelegt.

Diese Definition der Geometrie scheint allenfalls auf die analytische Geometrie zu passen, in der man es für

überflüssig hält, die Formeln sich sämmtlich deutlich zu machen; diese ist aber im Grunde eine Analysis, die nur mit den Formeln operiert und nur ihre termini technici aus der Raumanschauung entnimmt, im übrigen aber auf eine geometrische Auseinanderung nicht nur der Beweise, sondern auch der Resultate verzichtet. Man kann eben z. B. sehr wohl mit der Gleichung der geraden Linie operieren, ohne wirklich sich die gerade Linie selbst in ihren verschiedenen Beziehungen zuzustellen. (vergl. z. B. die Bücher von Hesse.)

Doch ob dies eine wirkliche Geometrie ist, möchte ich bezweifeln, es ist erst eine Vorbereitung zur Geometrie. Sie sehen, daß ich durchaus der Ansicht bin, daß auf die wirkliche Geometrie diese Definition der Axiome nicht passt. Ich erinnere Sie an die Figur der vorletzten Stunde (Fig. 81.). Wir können doch nicht von irgend welchen Querlinien daselbst sprechen, ohne die Figur vor Augen zu haben. Ich halte es demnach auch nicht für richtig, daß, wenn wir einmal die Axiome aufgestellt haben, wir dann die Anschauung bei unseren Untersuchungen hintansetzen, beim wirklichen geometrischen Denken vielmehr begleitet uns die Raumanschauung bei jedem Schritte.

In der That wissen Sie ja auch bereits, daß ich eine andere Definition der Axiome dem entgegenstellen will.

„Ich schreibe den Axiomen die Bedeutung zu, daß sie Forderungen vorstellen, vermöge deren wir uns über die Ungenauigkeit der Anschauung oder über die Begrenztheit der Genauigkeit der Anschauung zu unbegrenzter Genauigkeit erheben."

Ich denke mir also einen geometrischen Beweis so, daß die Figur uns die einzelne Aufeinanderfolge der Teile derselben, die Lagenbeziehungen von Punkten und Linien vor Augen führen soll, indem wir uns aber bewußt sind daß das, was wir ungenau vor uns sehen, nun begrifflich genau gedacht werden soll. Dieser Anschauungsweise entspricht ein hohes Maass von Toleranz bei der Aufstellung der Axiome. Jedes System der Axiome muß zulässig erscheinen, welches innerhalb der Genauigkeitsgrenzen unserer Anschauung mit der letzteren verträglich ist. Man vergleiche hier das, was wir über das Wesen der nichteuklidischen Geometrie gesagt haben. Nur der Ungenauigkeit unserer räumlichen Anschauung ist es zuzuschreiben, daß wir hyperbolische, parabolische oder elliptische Geometrie bei unseren Maassbestimmungen in gleicher Weise zu Grunde legen können, da eben unsere Anschauung uns nicht mit Sicherheit zu entscheiden gestattet, daß irgend eine der 3 Theorieen falsch ist.

Nun käme die Frage nach der Entstehung der Axiome. Ja, wenn man an der anderen Ansicht in Betreff der

Axiome festhält, so gilt der Streit darüber, ob die Axiome (resp. die Anschauung, die sich in den Axiomen ausdrückt) der Erfahrung entlehnt oder uns a priori gegeben sind. Wenn wir aber in den Axiomen begriffliche Festsetzungen sehen, die über die natürliche Anschauung hinausgreifen, so können dieselben nicht der Erfahrung entnommen sein. Denn wenn wir auch z.B. die Winkel im Dreieck messen, - ja, alles Messen ist mehr oder weniger von einer gewissen Ungenauigkeit begleitet, die uns mit aller Schärfe nicht zu entscheiden gestattet, ob die Summe der drei Winkel = 180° oder vielleicht größer oder kleiner ist. Bei jeder Messung gibt es ein endliches Maass der Genauigkeit, über welches hinaus gar Nichts in Erfahrung gebracht wird. Wir werden daher sagen:

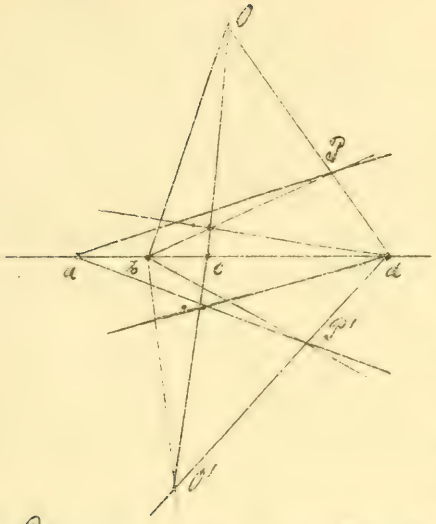
„Bei dieser Auffassung von der Bedeutung der Axiome sind die allgemeinen Bedingungen der Anschauung selbstverständlich durch die Erfahrung zu kontrolieren bezw. zu entwickeln durch möglichst genaue Messungen. Daß wir aber das so gewonnene Material auf absolut genaue Axiome beziehen, das stammt nicht aus der Erfahrung, sondern entstammt einem Bedürfnis unserer eigenen Natur." Das Gleiche gilt natürlich für alle Naturgesetze, die wir mathematisch aussprechen. Z.B. der Satz, daß die Beschleunigung mit

der Kraft proportional ist, dieser Satz kann experimentell auch nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit nachgewiesen werden, wenn wir denselben trotzdem in dieser Schärfe aufstellen, so ist dies eben ein mehr oder minder bewußter Akt unseres logischen Denkens, daß uns die einfachste Annahme, die mit der Wirklichkeit bis auf die Fehlergrenzen der Beobachtung übereinstimmt, als genau richtig vorauszusetzen läßt.

Indem ich diese Definition der Axiome gebe, betrachte ich offenbar die Mathematik ihrem Grundcharakter nach als „transcendent," als etwas, das über die Ungenauigkeit unserer Anschauungen hinausgreift. Man kann nun fragen, worin wohl die Bedeutung der Entwicklung einer solchen transcendenten Wissenschaft in den Anwendungen wieder beruht. Der Gedanke, der uns hier vorschwebt, wird sich vielleicht so wiedergeben lassen: Die Resultate der reinen Mathematik sind in den Anwendungen um so genauer richtig, je genauer bei den beabsichtigten Anwendungen die Axiome richtig sind, welche wir beim Beginn der mathematischen Schlußkette aufstellten.

Wir wissen z. B., daß, wenn wir mit Hilfe zweier verschiedener Parabeln zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt konstruieren, daß wir dann beide Male auf denselben Punkt treffen."

Fig. 82.



Ja, wenn wir diese Konstruktion einmal wirklich in einer Zeichnung ausführen, so wird dieser Satz um so genauer seine Bestätigung finden, je genauer wir zeichnen. Mathematisch genau kann man nicht zeichnen oder konstruieren. Wenn man z. B. bei einem schön geschliffenen Prisma sagt: die Ebenen seien mathematisch eben, so ist dies natürlich nicht wahr. Dieselben sind nur sehr viel mehr eben als die Ebenen, die wir gewöhnlich vor uns sehen. (In Wirklichkeit ist ja die Glasmasse nicht einmal continuierlich; sie ist molecular aufgebaut; sie ist mit einer Uebergangsschicht bedeckt etc. etc.)

Schwieriger ist nun die Frage, was haben unsere Anwendungen und geometrischen Anschauungen für die reine Mathematik zu bedeuten? Können wir aus der Anschauung selbst Beweise entnehmen? Wenn z. B. irgend zwei Curven gezeichnet uns vorliegen, wie etwa in Fig. 83, so sagen wir gern: offenbar haben diese Curven eine gemeinsame Tangente.

Natürlich, doch nur erst für die Anschauung. Ob aber den mathematisch scharfen Curven, die wir durch unsere Zeichnung versinnlichen wollen, wirklich eine Tangente zuzuschreiben ist, dies hängt noch durchaus davon ab, welches mathematisch scharfe Gesetz ich für diese Curven mir vorgeschrieben denke.

Fig. 83.

Bei unserer Auffassung vom Wesen der Anschauung wird man daher durch anschauungsmässige Betrachtung von Figuren wohl eine gewisse allgemeine Anleitung darüber gewinnen, welche mathematischen Gesetze stattfinden mögen, und wie deren Beweis im Allgemeinen zugliedern sein mag. Einen wirklichen Beweis aber wird man erst bekommen, wenn man die vorgeschriebenen Figuren durch gesetzmäßig auf Grund der Axiome erzeugte Figuren ersetzt und an diesen den allgemeinen Gedankengang erst im Einzelnen ausführt. Die Beschäftigung mit anschauungsmässigen Dingen gibt dem Mathematiker Anregung und Uebersicht über die zu behandelnden Probleme, aber sie nimmt die mathematische Behandlung selbst nicht vorweg.*)

*) Darum kann ich mich doch gelegentlich, in der Vorlesung

An eine jede solche theoretische Ueberlegung knüpfen sich gleich praktisch allerhand Betrachtungen, ethischen, moralischen Inhalts möchte ich sagen, soweit diese Worte im Interessenbereich des Mathematikers eine Bedeutung haben. Womit soll sich der Mathematiker beschäftigen? Die einen sagen: Ja, die Anschauung ist doch nichts wert, ich schränke mich dafür ein auf die in mir selbst erzeugten reinen Gebilde, unbekümmert um die Wirklichkeit. Das ist die Parole, die vor gewissen Hallen in Berlin ausgeht. In Göttingen dagegen wurde die Verbindung der reinen Mathematik mit der räumlichen Anschauung und den Problemen der Anwendungen stets aufrecht erhalten und nur in einer geeigneten Verknüpfung von Theorie und Praxis die wahre Grundlage mathematischen Forschens erkannt. Man war sich bewusst, daß die Entwickelungen der reinen Mathematik steril werden, wenn man um ihrer selbst willen an ihnen weiter baut, und daß uns Mathematiker eine gewisse Verantwortung trifft, wenn wir die Vertreter angewandter Gebiete ausschließlich mathematische Wege gehen lassen, was notwendig zu einer Verflachung

*) und auch sonst, mit einem Beweise nur an der angeschauten Figur begnügen, nämlich nämlich ohne Sinn, daß die Ergänzungen, welche bei Durchführung der mathematischen Einzelbetrachtungen hinzuzufügen sind, nach bekannten Vorschriften von jedem Mathematiker gefunden werden können.

des Denkens hinführt.

Sie sehen, daß wirklich in diesem Punkte eine große Meinungverschiedenheit unter den Mathematikern herrscht. Der einzelne Mathematiker ist ja ungehindert, mag er sich beschäftigen, wie er am meisten zu leisten sich fähig hält. Wenn aber eine ganze Generation mit dem Grundsatze vorgeht, sich nur mit rein theoretischen Untersuchungen zu beschäftigen unbekümmert um die Anwendungen, während andererseits die Praktiker von der reinen Wissenschaft abgekommt ihre eigenen Wege gehen, meine Herren, so halte ich dies für ein recht trauriges Ereignis.

Wenn man sich nun ganz auf den Standpunkt der Pädagogik stellen will, (dem wir mit dieser Diskussion von selbst immer näher kommen), dann dürfte es noch aus einem besonderen Grunde angezeigt sein bei mathematischer Beschäftigung die Verbindung mit der Anschauung durchaus aufrecht zu erhalten. Der Philosoph Herbart (in den 30er Jahren in Göttingen) hat es in seinen Vorlesungen immer wieder ausgesprochen, was ich jetzt meine. Man vergleiche die zahlreichen Stellen in Herbart's Schriften, wo er über die pädagogische Behandlung der Mathematik spricht. Er hat ausgesprochen, daß für 5/6 aller Schüler die Mathematik absolut langweilig

ist, wenn man sie nicht in direkte Verbindung mit den Anwendungen bringt, während sie hinwiederum für 5/6 derselben sofort auf das Äusserste interessant ist, wenn man sie mit der Anschauung verknüpft.

Herbart betrachtet es nun überhaupt als das erste Erforderniß, den Unterricht interessant zu machen. *)

Darum soll man in der Schule in der Behandlung der Mathematik zunächst auf die Anschauung sich stützen und dann allmählig zu größeren und immer größeren Abstraktionen sich wenden. Die Anschauung ist das Mittel, die Abstraktion ist das Ziel.

Wenn man nun einmal prüft, wie der mathematische Unterricht auf den Schulen gegeben wird, so findet man, daß die Methoden, die ich im Sinne Herbarts empfehle, leider nicht eingehalten werden. Die beiden Extreme des Unterrichts, dem Verbindung erst das Wesen der Sache ausmacht, finden sich im allgemeinen einseitig kultivirt. Das eine Extrem findet man vorzüglich in den humanistischen, das andere in den Real-Gymnasien gehandhabt. In den ersteren werden vielfach die Untersuchungen auf größte Schärfe durchgeführt, und man sucht Interesse zu zeigen, welches zu dieser Schärfe oder zu den Untersuchungen überhaupt hinführt, in den letzteren

*) was natürlich nicht im Sinne der sophistischen Auffassung gemeint ist.

Schulen pflegt man sich zu ausschließlich an die praktische Anwendbarkeit zu halten. In dem erst Erwähnten liegt es denn auch begründet, wenn in späteren Jahren mancher Philologe und Historiker von sich sagt, er habe die Mathematik nie verstanden.

In Betreff des anderen Extrems sei einmal auf ausländische Verhältnisse verwiesen. Wir denken z. B. an die Verhältnisse auf norwegischen Mittelschulen. Dort werden die Logarithmen erklärt und behandelt, wie man etwa lesen lernt. Es wird gezeigt, wie man mit den Logarithmen praktisch rechnet, — wer aber die Logarithmen berechnet hat, und wie dies geschehen ist u. dergl., davon wird keine Erwähnung gethan. Ganz so schlimm ist es ja in Deutschland wohl nirgendwo, aber namentlich bei denjenigen, die sich ausschließlich mit darstellender Geometrie beschäftigen, mit der Ausführung von Zeichnungen — besonders in Österreich ist der Unterricht in der darstellenden Geometrie sehr entwickelt — bei diesen wird das logische Denkvermögen leicht unentwickelt bleiben. Dies ist eben so wenig, was wir wollen, wie das, was auf humanistischen Gymnasien erzielt wird. Es muß vielmehr beides im Unterricht berücksichtigt werden, die wirkliche Anschauung und die Fähigkeit, sie zu beherrschen, wie die rein begriffliche Betrachtungsweise mit aller

mathematischen Strenge. Nur muß man stets sich vor Augen halten, was man in letzterer Hinsicht seinen Zuhörern zumuten darf. Ich empfehle keineswegs, daß man in der Schule die nicht-euklidische Geometrie erwähnt oder die Definition der Axiome, wie wir sie jetzt hier besprochen haben, letzteres vielleicht höchstens in den oberen Klassen.

Eins aber möchte ich meinen Zuhörern, deren einst als Lehrer tätig zu sein beschieden ist, ans Herz legen, den Herbart'schen Grundsatz alles Unterrichts:

„Seien Sie niemals absolut langweilig!"

ff.

Nicht-Euklidische Geometrie, II.

Vorlesung,

gehalten während des Sommersemesters 1890

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

— Zweiter Abdruck. —

GÖTTINGEN 1893.

Inhaltsverzeichniss.

Nicht-Euklidische Geometrie. II.

Seite

Vorbemerkungen 1

I. Einleitung in die projective Raumgeometrie.

Punkt- und Ebenen-Coordinaten 2
Liniencoordinaten 9
Complexe, Congruenzen etc. 23
Congruenzen mit imaginären Leitlinien 33

II. Imaginäre Raumelemente.

Imaginäre Punkte und Ebenen 38
Imaginäre Gerade insbesondere 40

III. Allgemeines über Flächen zweiten Grades.

Algebraische Eigenschaften, Eintheilung der F_2 47
Realitätsunterschiede der ovalen, ringförmigen, nulltheiligen F_2 55

IV. Gerade Linien auf den F_2.

Ringförmige Flächen 66
Nulltheilige F_2: die ausgezeichneten Congruenzen 75
Ovale F_2; Beziehungen zur Functionentheorie 82

V. Collineationen des Raumes.

Ueberhaupt 91
einer F_2 in sich 97

VI. Speciell bei der nulltheiligen F_2.

Cayley's allgemeine Formel für orthogonale Substitutionen 108
Specielle Formeln für $n = 4$ 113
Beziehungen zur Quaternionentheorie 120

VII. Bei der ringförmigen F_2.

Projective Geometrie auf der F_2 125
Maassgeometrie ebendaselbst 133

VIII. Ovale Flächen.

Parametervertheilung über die Fläche hin 142
Verschiedene Arten zugehöriger Maassgeometrie. Doppelverhältniss von 4 Puncten der Fläche 151

Seite

Ueberhaupt viererlei Geometrie auf der Fläche; zugehörige Gruppe und Invariantentheorie 160
Bedeutung dieser Geometrieen für Functionentheorie 170
Kinematisches zur einzelnen linearen Substitution 177

IX. Einordnung der Metrik in das projective System.

Kugelkreis 191
Grundsätze der Kinematik 199
Mechanik freier Systeme, Potential. 203
Mechanik starrer Körper schlechtweg (Schraubentheorie) 211
Massengeometrie 217

X. Specielle Bemerkungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie.

Allgemeine Distanzformeln 224
Die Schiebungen der elliptischen Geometrie 231
Clifford's Parallelen 234-238

Die Aufgabe dieser Vorlesung läßt sich leicht bezeichnen, insofern sie nur eine Fortsetzung der Vorlesung des letzten Semesters bedeutet. Wir hatten uns dort die Einschränkung auferlegt, uns nur in zwei Dimensionen, in der Ebene zu bewegen. Wir werden daher jetzt die Räume dreier Dimensionen betrachten und in ihnen unsere Untersuchungen uns widmen. Diese Erweiterung wird uns nicht prinzipielle Schwierigkeiten, dafür aber besondere Interesse bieten. Beispielsweise werden wir, wenn wir die Cayleysche Maßbestimmung für den Raum haben, die diesen sich skizzende Kinematik betrachten und dadurch der Mechanik der gewöhnlichen Geometrie die Mechanik der nicht-Euklidischen Geometrie gegenüber stellen. Ferner werden wir für die Funktionentheorie neue Hilfsmittel gewinnen, entsprechend dem, was wir im letzten Semester bereits für die Ebene aussprachen, daß die nicht-Euklidische Geometrie für die moderne Funktionentheorie besonders wichtig ist.

Inhaltlich wollen wir gleich ähnlich einteilen, wie im vorigen Semester. Wir werden wieder zwei Hauptteile zu unterscheiden haben. Im ersten Teil müssen wir uns mit der projektiven Geometrie des Raumes vertraut machen. Dieser Abschnitt wird daher den Charakter einer Einleitung haben. Der zweite Teil wird sich mit der Einordnung der metrischen Beziehungen in die projektive

Geometrie beschäftigen; wir sagen allgemein mit „der Einordnung der metrischen Beziehungen," weil wir nicht nur die Verhältnisse der Cayleyschen Maassbestimmung, sondern auch die gewöhnliche Euklidische vom projektiven Standpunkte aus betrachten wollen:

Erster Teil: Einleitung:

Projektive Geometrie des Raumes.

Es ist wohl billig, zunächst von den Grundgebilden und ihren Coordinaten zu reden. Das erste Grundgebilde ist der Punkt, demselben steht dualistisch als zweites Grundgebilde die Ebene gegenüber.

Sprechen wir zuerst vom Punkte. Statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z werden wir in unserer Vorlesung durchaus Tetraedercoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gebrauchen, deren Verhältnis $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ allein in Betracht kommt. Wir definiren dieselben zunächst analytisch, indem wir von den x, y, z ausgehen.

Wir setzen:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14}, \\
\varrho x_2 &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24}, \\
\varrho x_3 &= a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34}, \\
\varrho x_4 &= a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44}.
\end{aligned}$$

In Worten: Die Tetraedercoordinaten verhalten sich wie

ganze lineare Funktionen der gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, wobei jedoch die Bedingung zu erfüllen ist, daß die Determinante der Coefficienten $|a_{ik}| \geq 0$ sein soll. Anderenfalls wären die x_1, x_2, x_3, x_4 nicht als Coordinaten zu benutzen, da wir nicht umgekehrt die x, y, z durch dieselben ausdrücken könnten.

Hieran knüpfen sich nun gleich einige Bemerkungen. Setzen wir die rechten Seiten der obigen Beziehungen gleich 0, z. B. $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$, so sind hierdurch 4 Ebenen dargestellt, wir nennen sie die 4 Ebenen des Coordinatentetraeders. Setzen wir ferner die 4 Ausdrücke gleichzeitig gleich 1, so finden wir durch Auflösung der Gleichungen die gewöhnlichen Coordinaten des sogenannten „Einheitspunktes" unseres Tetraedercoordinatensystems, d. h. desjenigen Punktes, dessen 4 Coordinaten in diesem System einander gleich sind. Wir fügen sogleich die Bemerkung hieran, daß wir das Verhältnis je zweier der homogenen Coordinaten $\frac{x_\alpha}{x_\beta}$ immer durch ein Doppelverhältnis deuten können, welches sich auf die aus dem Coordinatentetraeder, dem Einheitspunkt und dem Punkte x bestehende Figur bezieht. Dieses Doppelverhältnis können wir dann andererseits als Definition von $\frac{x_\alpha}{x_\beta}$ gelten lassen, insofern es uns darauf ankommt, alles auf Doppelverhältnisse hinauszuspielen.

Wenn wir nun ein zweites Tetraedercoordinatensystem

y_1, y_2, y_3, y_4 annehmen, so werden die Coordinaten derselben gleichfalls durch ein lineares Gleichungssystem mit den x, y, z verbunden sein. Rechnen und dann früheren System auf pag. 2 können wir dann die x, y, z eliminieren. Wir finden als Resultat:

„Von einem Coordinatentetraeder zum anderen gelangt man durch homogene lineare Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante über."

Wir fügen noch hinzu:

„Das gewöhnliche Coordinatensystem der x, y, z ist als ein besonderer Fall des Tetraedercoordinatensystems anzusehen, sobald wir nur statt x, y, z $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ schreiben und der Gl. $t = 0$ entsprechend die ∞ weite Ebene als 4te Coordinatenebene gelten lassen."

Wir wollen nun weiter von der Ebene sprechen. Welche Coordinaten werden wir der Ebene erteilen? In den Punktcoordinaten ist die Ebene dargestellt durch die lineare Gleichung: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$. Die Coefficienten dieser Gleichung u_1, u_2, u_3, u_4, d.h. ihre Verhältnisse betrachten wir dann als die „Coordinaten" dieser Ebene.

Wir sind bei dieser Ableitung natürlich sehr einseitig verfahren indem wir den Punkt bevorzugt haben. Man könnte umgekehrt auch von der Ebene und der Bedingung ihrer Coordinaten ausgehen und durch die Gleichung:

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ die Punktcoordinaten definiert denken. Streng logisch verfahrend können wir auch die Coordinaten u und x unabhängig von einander als Doppelverhältnisse einführen; die Gl. $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ giebt also dann die Bedingung für die „vereinigte Lage" von Punkt und Ebene. Wir werden fernerhin diese Gl. abkürzend durch $u_x = 0$ bezeichnen.

Und dann fahren wir fort:

Halten wir in der Gl. $u_x = 0$ die u fest und lassen die x laufen, so haben wir alle Punkte, die in einer festen Ebene liegen und wir sagen: die Ebene wird durch eine Gleichung in Punktcoordinaten dargestellt.

Halten wir umgekehrt die x fest und lassen die u laufen, so haben wir alle Ebenen die durch einen festen Punkt gehen und wir sagen: dieser Punkt wird durch die Gl. $u_x = 0$ in Ebenencoordinaten dargestellt.

Wir wollen ferner bemerken, daß Ebenencoordinaten und Punktcoordinaten sogenannte <u>contragrediente Variabele</u> sind. Wenn ich nämlich die Punktcoordinaten durch eine homogene Substitution umändere,

$$\begin{aligned}
\varrho\, y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} + x_3 + \alpha_{14} x_4 ,\\
\varrho\, y_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} + x_3 \; \alpha_{24} x_4 ,\\
\varrho\, y_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} + x_3 \; \alpha_{34} x_4 ,\\
\varrho\, y_4 &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} + x_3 \; \alpha_{44} x_4 .
\end{aligned}$$

dann wird jedes System von 4 Größen, das sich in

derselben Weise substituiert, im System cogredienter Variabler genannt werden, im Gegensatz hiezu gehen die neuen Ebenencoordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 bei einem solchen Processe nicht aus den alten Ebenencoordinaten durch dieselbe Substitution hervor. Man muß die Substitution vielmehr so einrichten, daß:

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = u_x \text{ wird.}$$

Die hieraus sich ergebende Abhängigkeit der u und v nennt man die transponierte Substitution, die Variabelen u und v in Bezug auf x und y dagegen „contragrediente Variable". Allgemein werden wir sagen:

„Die Contragredienz zwischen Ebenencoordinaten und Punktcoordinaten findet gerade darin ihren Ausdruck, daß bei jeder linearen Substitution der Ausdruck u_x in den entsprechenden Ausdruck v_y übergeht."

Nun noch eine kleine Frage von ganz elementarem Charakter. Wie berechnen wir diejenige Ebene u, die durch die 3 gegebenen Punkte x, y, z geht? Es muß sein:

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 &= 0, \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 &= 0, \\ u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + u_4 z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten u unmittelbar als:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix};$$

d.h. als die Verhältnisse der 4 Unterdeterminanten dieser Matrix.

Diesem sehr einfachen Satz wollen wir eine spezielle Bedeutung geben, indem wir interpretieren:

„Die Ebenencoordinaten sind abkürzende Bezeichnungen für die dreigliedrigen Unterdeterminanten aus den Coordinaten dreier Punkte."

In ganz analoger Weise stellt sich diesem Satz der folgende an die Seite, den wir erhalten, wenn wir von Ebenencoordinaten ausgehen:

Die Punktcoordinaten sind abgekürzte Bezeichnungen für die dreigliedrigen Determinanten aus den Ebenencoordinaten dreier Ebenen."

In dieser Formulierung liegt zugleich, dass die Ebene unverändert bleibt, wenn man die 3 Punkte x, y, z durch irgend welche linearen Verbindungen $\lambda x + \mu y + \nu z$ ersetzt. Dass nämlich zunächst jeder solche Punkt $\lambda x + \mu y + \nu z$ in der Ebene u liegt, ergiebt sich direkt aus den 3 Gleichungen der letzten Seite. Denn aus ihnen folgt:

$\lambda u_x + \mu u_y + \nu u_z = 0$ oder anders geschrieben:

$u_{\lambda x + \mu y + \nu z} = 0$. Um unsere Behauptung allgemein nachzuweisen, denken wir einmal, wir hätten statt der drei Punkte x, y, z beliebige drei lineare Verbindungen derselben eingeführt.

Dann würde also sein:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 =$$

$$\begin{array}{|cccc|}
\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 z_1 ; & \lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 + \nu_1 z_1 ; & \lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 + \nu_1 z_3 ; & \lambda_1 x_4 + \mu_1 y_4 + \nu_1 z_4 \\
\lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 + \nu_2 z_1 ; & \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 + \nu_2 z_1 ; & \lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 + \nu_2 z_3 ; & \lambda_1 x_4 + \mu_2 y_4 + \nu_2 z_4 \\
\lambda_3 x_1 + \mu_3 y_1 + \nu_3 z_1 ; & \lambda_3 x_2 + \mu_3 y_2 + \nu_3 z_1 ; & \lambda_3 x_3 + \mu_3 y_3 + \nu_3 z_3 ; & \lambda_1 x_4 + \mu_3 y_4 + \nu_3 z_4
\end{array}$$

„Wir haben nun nachzuweisen, daß man auf dieselben Ebenencoordinaten u wie vorhin kommt, wenn man in dieser Weise statt der 3 Punkte x, y, z irgend 3 mit ihnen linear verknüpfte Punkte einführt." Wir führen den Beweis algebraisch. Fassen wir einmal die erste Determinante obiger Matrix ins Auge, so erkennen wir leicht, daß dieselbe nach dem Determinanten-Multiplicationsgesetz gleich dem Product:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$ ist.

„In der That erweist sich daher, wenn wir aus der Matrix der Punkte $\lambda x + \mu y + \nu z$ die 4 möglichen Determinanten bilden, jede derselben gleich der entsprechenden Determinante der x, y, z selbst, multiplicirt mit der Determinante der λ, μ, ν." q.e.d.

Diese ganze Betrachtung haben wir gegeben, um uns einer neuen Frage zuzuwenden, die speciell

erst in der Raumgeometrie auftritt, für die in der Geometrie der Ebene noch kein Platz ist. Wir werden hier nicht nur Punkte und Ebenen, sondern noch eine Mittelstufe, nämlich gerade Linien einzuführen haben.

Eine gerade Linie, die 2 Punkte verbindet, erscheint als der Träger der Punkte $\lambda x + \mu y$; ebenso ist eine gerade Linie, die als Schnitt zweier Ebenen u und v gegeben ist, allen Ebenen $\lambda u + \mu v$ gemeinsam.

Es ist nun die Frage, was wir als Liniencoordinaten im Raume ansehen wollen. Hier haben wir die Antwort zu geben, die Grassmann (1844) und unabhängig von ihm Plücker (1847) und Cayley (1857) aufgestellt haben. Alle drei kamen auf verschiedenem Wege zu demselben Resultat. Grassmann, dessen Namen ich im vorigen Semester noch nicht genannt habe, der aber zu den hervorragendsten Geometern dieses Jahrhunderts gehört, hat 1844 ein Werk erscheinen lassen: „Die Ausdehnungslehre," das 1862 noch einmal in wesentlich umgeänderter Darstellung in 2. Auflage verlegt wurde. Grassmann geht bei seiner Darstellung davon aus, daß die Beschränkung unserer Anschauung auf 2 oder 3 Dimensionen für die Begriffsbildung jedenfalls nur etwas Zufälliges ist. Demnach führen wir sogleich n homogene Variable $x_1, x_2, \ldots x_n$

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, durch die wir „einen Punkt x" in einem mehrfach ausgedehnten Raum festgelegt denken. (NB. Es ist dies natürlich für uns wie für Grassmann nur eine bildliche Sprechweise ohne irgend welche metaphysische Bedeutung.)

Nun faßte Grassmann den Gedanken, in dem mehrfach ausgedehnten Raume sich gerade so eine Geometrie zu construieren, wie es bei der analytischen Geometrie bei 2 und 3 Dimensionen geschieht. Den Inbegriff dieser Sätze bezeichnet er als „Ausdehnungslehre."*) In diesem mehrfach ausgedehnten Raume sieht sich nun Grassmann veranlaßt, eine Reihe von Grundgebilden zu betrachten; als solche stellt er die folgenden auf:

1.) den einzelnen Punkt $\lambda' x'$ selber.

2.) dasjenige Gebilde, das sich aus 2 Punkten durch lineare Verbindung erzeugen läßt, das also alle Punkte $\lambda' x' + \lambda'' x''$ trägt. (Demselben entspricht in unserem gewöhnlichen Raume demnach die gerade Linie.)

3.) Dann dasjenige Gebilde, das drei Punkte und ihre linearen Verbindungen enthält.

---

*) Grassmann wollte nicht den Ausdruck: „Hypergeometrie" oder „Geometrie höherer Räume" gebrauchen, und wählte eben darum diese Bezeichnung „Ausdehnungslehre," die einer Mißdeutung weniger ausgesetzt ist.

$\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x'''$ (entspr. der Ebene im gewöhnlichen Raume).

In derselben Weise fortzufahren ergeben sich die Gebilde, die 4 Punkte, 5 Punkte u.s.w. enthalten sollen, schließlich:

$n-1$.) dasjenige Gebilde, welches die Punkte trägt: $\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x''' + \ldots\ldots + \lambda^{(n-1)} x^{(n-1)}$, wo die λ beliebig zu variiren, die x dagegen konstant sind. Weiter unten, p. 19., wird dieses Gebilde als „Ebene" bezeichnet.

Wollten wir endlich nicht $n-1$ sondern n Punkte zusammenstellen, so würden wir den Gesammtraum erhalten.

Dies sind also die verschiedenen Stufen von Gebilden, die Grassmann im $(n-1)$ fach ausgedehnten Raume unterscheidet. [Grassmannsche Stufen.] Er sieht sich jetzt vor die Frage gestellt: Wie werden die einzelnen Gebilde der ersten, zweiten, dritten u.s.w. Stufe durch Coordinaten zu bestimmen sein? Im speciellen in Rücksicht auf den dreidimensionalen Raum: Wie wollen wir die grade Linie festlegen? – d.h. unsere poetisch formulierte Frage. Und hier stellt nun Grassmann folgendes allgemeine Princip auf (auf welches wir durch unsere Bemerkung über den Charakter der Ebenencoordinaten vorbereitet sind): „Um das einzelne Gebilde der verschiedenen Stufen durch Coordinaten festzulegen (z.B. durch homogene

Coordinaten /, betrachte man einfach die Determinanten derjenigen Matrix

$$\left| \begin{matrix} x'_1 & x'_2 & \dots\dots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \dots\dots & x''_n \end{matrix} \right|,$$ welche sich aus den Coordinaten der erzeugenden Punkte aufbauen läßt."

Wir fügen sogleich hinzu: „Diese Coordinatenwahl von Grassmann erscheint als durchaus zulässig, weil man von einem gemeinsamen Faktor abgesehen, der bei homogenen Coordinaten nicht in Betracht kommt, genau auf dieselben Coordinaten des Gebildes kommt, wenn man statt der anfänglich gewählten Punkte x', x'' etc. irgend welche aus ihnen durch lineare Verknüpfung hervorgehende Punkte zur Erzeugung des Gebildes zu Grunde legt."

Von den allgemeinen Grassmann'schen Principe machen wir nun Anwendung auf die gerade Linie des (dreidimensionalen) Raumes. Dieselbe ist definiert als das Gebilde, welches die Punkte x, y und $\lambda x + \varrho y$ trägt. Wir bilden die Matrix: $\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right|$. Dieselbe repräsentiert offenbar 6 Determinanten. Wir wollen zur Abkürzung einführen für $x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta$ die Bezeichnung $p_{\alpha\beta}$: Es folgt, wie leicht ersichtlich, sofort $p_{\alpha\beta} = -p_{\beta\alpha}$. Alsdann lauten die 6 zu unterscheidenden Determinanten:

$p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$. Wenn wir dann anstatt x und y $\lambda x + \mu y$ wählen und aus der entsprechenden Matrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 & \lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 & \lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 & \lambda_1 x_4 + \mu_1 y_4 \\ \lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 & \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 & \lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 & \lambda_2 x_4 + \mu_2 y_4 \end{vmatrix}$$

die Determinanten p'_{ik} bilden, so erkennen wir leicht, daß die Beziehung besteht:

$$p'_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \cdot p_{ik}.$$

Wir sehen so den auf der Seite 12 ausgesprochenen allgemeinen Satz hier bestätigt. Diese 6 Größen p_{ik} oder genauer die Verhältnisse derselben wird man nun nach Grassmann als die Liniencoordinaten einführen: $p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23}$.

Was nun historisch die Grassmannsche Ausführung dieser Verhältnisse in seiner „Ausdehnungslehre" anbetrifft, so wollen wir bemerken, daß dieselben in einer eigenartigen und schwer verständlichen Sprache geschrieben ist. Grassmann hat einmal das Bestreben, alle termini technici zu verdeutschen: So spricht er z. B. vom „Spath" statt vom „Parallelepiped" (vergl. Mineralogie), von der „Abschattung" statt „Projektion" u. s. w. Die innere Schwierigkeit liegt ferner darin begründet, daß er wenig Formeln gebraucht, sondern alles vermittelst „Abschattungen" und entsprechender

bildlicher Redeweisen auch bei mehr als drei Dimensionen ausführt. Dazu überall ein eigentümlicher philosophisch-didaktischer Standpunkt. Diesem Umstande ist es denn auch zuzuschreiben, daß das Buch von 1844 zunächst sehr wenig gelesen wurde. Nicht viel besser ist es zuerst der Auflage von 1862 gegangen, bei der Grassmann das formale Element zu sehr in den Vordergrund gestellt hat. Es hat etwa 25 Jahre gedauert, bis man etwas mehr auf die Ideen von Grassmann zu achten begann.

Plücker hat 1847 in seinem „System der Geometrie des Raumes" gleichfalls die Liniencoordinaten bereits erwähnt; doch hat er diese Ideen erst später weiter bearbeitet. Diese Ideen sind weniger allgemein, sondern knüpfen an die concreten Verhältnisse unseres Raumes an. Sie finden sich im Zusammenhange dargelegt in dem 1868-69 veröffentlichten Werke: „Die neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement."

Erst durch diese Arbeit ist die Sache zum allgemeinen Bewußtsein gekommen; man spricht daher gern von „Plückerschen Liniencoordinaten." Plücker hat um die Entwicklung des Coordinatenbegriffs der neueren Geometrie (Ebenencoordinaten, homogene Coordinaten) so große Verdienste, daß man ihm wenig abbricht, wenn

man feststellt, daß hinsichtlich der Einführung der $p_{\alpha\beta}$ Graßmann die Priorität hat. Wer sich für die Einzelheiten dieser Entwickelung interessiert, sei auf die Gedächtnißrede auf Plücker hingewiesen, die Clebsch in der hiesigen Societät gehalten hat.

[Zum Gedächtnis an Julius Plücker, 1871.]

Betrachten wir nun unsere Liniencoordinaten genauer. Von wie viel Konstanten hängt die gerade Linie im Raume ab? Da die gerade Linie jedesmal durch 2 Punkte, die wir in zwei Coordinatenebenen wählen können, bestimmt ist, so sind demnach 4 von einander unabhängige Größen zur Festlegung der Linie nötig.

Wenn wir homogene Variable haben wollen, so werden wir die gerade Linie durch 5 homogene Variable zu bestimmen haben. Wir haben aber 6 Größen $p_{\alpha\beta}$ zur Festlegung der geraden Linie vor uns. Folglich werden diese 6 Größen nicht von einander unabhängig sein, sondern sie werden einer Bedingungsgleichung genügen müssen. Diese Bedingungsgleichung ist vom 2ten Grade in den $p_{\alpha\beta}$. Man erhält sie, indem man sich die 4 gliedrige Determinante bildet, die sich durch Wiederholung der Matrix ergibt. Diese ist sicher gleich 0. Wir haben also:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

Diese 4 gliedrige Determinante kann man nunmehr zweigliedrigen Unterdeterminanten ordnen, indem man jede Determinante der ersten beiden Zeilen mit der zugehörigen Determinante der letzten beiden Zeilen multipliciert. Man erhält so leicht $(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23}) = 0$. Diese Identität bezeichnen wir abkürzend mit $\mathfrak{P} = 0$. Somit haben wir das Resultat:

„Zwischen den 6 homogenen Coordinaten $p_{\alpha\beta}$ der Raumgeraden besteht die Identität $\mathfrak{P} = 0$ vermöge deren die $\binom{4}{2}$ $p_{\alpha\beta}$ auf 5 unabhängige homogene Größen zurückkommen, wie es sein muß da die Raumgerade von 4 Konstanten abhängt." Deshalb kann es weiterem keine fernere Identität, insbesondere keine lineare Identität zwischen den $p_{\alpha\beta}$ bestehen.

Nun versteht es sich wohl von selbst, daß neben dieser ersten Einführung der Liniencoordinaten sich eine zweite stellt, die sich ergiebt wenn man von Ebenencoordinaten ausgeht, statt von Punktcoordinaten. Es seien durch u und v zwei Ebenen bezeichnet, die sich in einer Geraden schneiden, es wird dann eine

jede Ebene λ welche durch dieselbe Gerade hindurch gehen. Wir bilden wieder die Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

deren Determinanten wir mit $g_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta = -g_{\beta\alpha}$ bezeichnen wollen. Dann ist ganz klar:

Indem wir mit Ebenencoordinaten beginnen, können wir der geraden Linie in neuer Weise 6 Coordinaten beilegen: $g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{34}, g_{42}, g_{23}$, zwischen denen die quadratische Relation $g_{12}g_{34} + g_{13}g_{42} + g_{14}g_{23} = 0$ oder abkürzt $\Omega = 0$ besteht, während sie übrigens linear unabhängig sind.

Nun entsteht natürlich die Frage: Wie verhalten sich die 6 Coordinaten g_{ik} zu den 6 Coordinaten g_{ik}? Sind dies etwa vielleicht bis auf die Reihenfolge dieselben Größen? Ehe wir hierauf näher eingehen, wollen wir an folgende Analogie erinnern: Die Punktcoordinaten sind entweder als eingliedrige Determinanten aus Punktcoordinaten oder als dreigliedrige Determinanten aus Ebenencoordinaten definiert und ebenso können wir die Ebenencoordinaten entweder als eingliedrige Determinanten aus Ebenencoordinaten oder als dreigliedrige Determinanten aus Punktcoordinaten auffassen.

Beide Male bekommen wir in jedem Falle dieselben Größen. So sind, behaupten wir, die Linienkoordinaten

p und q, die beziehungsweise als zweigliedrige Determinanten der Punkt- resp. der Ebenencoordinaten definiert sind, ebenfalls wieder dieselben Größen, und zwar bestehen im Einzelnen die Beziehungen:

$$\mu \cdot q_{12} = p_{34}\,; \quad \mu \cdot q_{34} = p_{12}\,;$$
$$\mu \cdot q_{13} = p_{42}\,; \quad \mu \cdot q_{42} = p_{13}\,;$$
$$\mu\, q_{14} = p_{23}\,; \quad \mu\, q_{23} = p_{14}\,.$$

Ehe wir diese Behauptung nachweisen, wollen wir vorerst gleich „den allgemeinen Graßmannschen Determinantensatz" aussprechen, von dem unser Satz ein specieller Fall ist.

Durch die lineare Kombination der k Punkte: $x', x'', \ldots\ldots x^{(k)}$ setzen wir uns ein lineares Gebilde zusammen im Raume der n Variabeln, deren Coordinaten die Unterdeterminanten k^{ter} Ordnung $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ der betreffenden Matrix sind. Andererseits können wir uns dieses lineare Gebilde auch durch Ebenen bestimmt denken und zwar durch $n-k$ Ebenen mit den Coordinaten $u', u'', \ldots\ldots u^{(n-k)}$. Aus ihnen bilden wir die Unterdeterminanten $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, die wir wieder als Coordinaten für das lineare Gebilde wählen. Es ist leicht ersichtlich, daß die Anzahl der p und die Anzahl der q übereinstimmt. (da $u_{(k)} = u_{(n-k)}$).

Beziehen sich nun die p und q auf dasselbe lineare Gebilde, so gilt für dieselben nach Graßmann die Indentität:

$$\omega \cdot q_{\alpha'\beta'\gamma'\ldots} = \pm p_{\alpha\beta\gamma\ldots}$$

(das ± Zeichen ist hinzugesetzt, um die Reihenfolge $\alpha\beta\gamma\ldots$ unentschieden zu lassen), die wir mit den Worten begleiten:

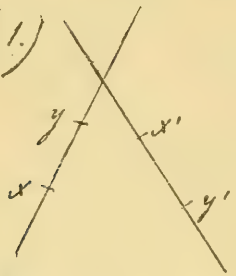
„Wenn ich für dasselbe lineare Gebilde einerseits k gliedrige Determinanten aus Punktcoordinaten p als Coordinaten berechne, andererseits $n-k$ gliedrige Determinanten q aus Ebenencoordinaten als Coordinaten berechne, dann sind die p mit den q proportional, so zwar, daß jedem p nach gehöriger Fixirung der Vorzeichen immer dasjenige q entspricht, welches mit ihm zusammen sämmtliche Indices 1, 2, 3 ... bis n aufweist."

Diesen allgemeinen Grassmannschen Satz wollen wir nun in dem speciellen Falle der Linienscoordinaten beweisen und zwar in der Weise, dass wir die Bedingung ins Auge fassen, unter der sich 2 gerade Linien schneiden. Diese Bedingung wollen wir nämlich in den p und q auf alle mögliche Weise ausdrücken. Die Vergleichung dieser verschiedenen Ausdrucksweisen wird uns dann gerade liefern, was wir brauchen. Wir können nun auf 4 verschiedene Weisen die betreffende Bedingung in Ansatz bringen:

1. Die beiden geraden Linien seien festgelegt entsprechend durch die Punkte x, y und x', y' (v. Figur). Sollen dieselben sich schneiden, so muß sich durch

die 4 Punkte eine Ebene hindurchlegen lassen,
d. h: es muss sein

Fig. 1.)



$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix} = 0$$

Wenn wir nun diese 4 gliedrige Determinante in derselben Weise, wie es bereits früher geschehen, nach 2 gliedrigen Unterdeterminanten entwickeln, so ergibt sich folgendes:

$$p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p_{34}p'_{12} + p_{42}p'_{13} + p_{23}p'_{14} = 0$$

Dies ist die erste Form der Bedingung, für den Schnitt zweier geraden Linien.

2.) Wir können nun genau die dualistische Betrachtung anstellen. Es seien 4 Ebenen u, v und u', v' gegeben, wann schneiden sich die von u mit v und von u' mit v' gebildeten Geraden in einem Punkte? Dann und nur dann, wenn die 4 Ebenen einen Punkt gemeinsam haben. Es muss daher sein:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus ergiebt sich als zweiter Ansatz der verlangten Bedingung:

$$g_{12}\,g'_{34} + g_{13}\,g'_{42} + g_{14}\,g'_{23} + g_{34}\,g'_{12} + g_{42}\,g'_{13} + g_{23}\,g'_{14} = 0. \quad *)$$

Diesen beiden ersten Formeln können wir nun noch zwei weitere entgegenstellen.

3.) Wir erhalten nämlich eine weitere Bedingung für den Schnitt zweier Graden, indem wir die eine Gerade als Verbindende zweier Punkte x', y', die andere als Schnitt zweier Ebenen u und v gegeben denken. In dem Büschel der beiden Ebenen u_z und v_z, nämlich $u_z + \lambda v_z = 0$ wird sich dann stets eine Ebene finden, die durch den Punkt x hindurchgeht: $u_{x'} + \lambda v_{x'} = 0$ und eine zweite, die durch den Punkt y' hindurchgeht: $u_{y'} + \lambda v_{y'} = 0$. Sollen die beiden geraden Linien sich nun schneiden, so müssen diese Ebenen identisch sein, und so kommt die Bedingung des Schneidens darauf hinaus, daß aus den beiden letzten Gleichungen derselbe Wert des λ sich ergiebt. Es muß daher sein:

$$u_{x'}\,v_{y'} - v_{x'}\,u_{y'} = 0 \text{ oder ausführlich geschrieben:}$$

$$(u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 + u_4 x'_4)\cdot(v_1 y'_1 + v_2 y'_2 + v_3 y'_3 + v_4 y'_4) - (v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + v_3 x'_3 + v_4 x'_4)\cdot(u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + u_3 y'_3 + u_4 y'_4) = 0$$

---

*) Diese Bedingung können wir abkürzend darstellen durch 1.) $\Sigma\, p_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}} = 0$ resp. 2.) $\Sigma\, p'_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial Q}{\partial p'_{\alpha\beta}} = 0$, wo P und Q die auf pag. 17. eingeführten Ausdrücke 2ten Grades sind.

Nach dem Ausmultiplicieren ergiebt sich beim zweckmäßigen Zusammenfassen der einzelnen Summanden das einfache Resultat, daß $p'_{\alpha\beta} = x'_\alpha y'_\beta - x'_\beta x'_\alpha$ immer multipliciert mit $q_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha$ vorkommt. In Worten: Es ist jede Determinante aus den $x'y'$ multipliciert mit der entsprechenden Determinante aus den u, v, so daß unsere Bedingungsgleichung lautet:

$$3.) \quad \Sigma\, p'_{\alpha\beta}\, q_{\alpha\beta} = 0.$$

4.) Diese neue Bedingung des Schneidens zweier Geraden gibt uns sofort, indem wir die geraden Linien entsprechend mit einander vertauschen, als 4te Form der Bedingung:

$$4.) \quad \Sigma\, q'_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0.$$

Vergleichen wir nun diese beiden Formeln mit denen der vorigen Stunde; wir finden, es muß gleichzeitig sein:

$$1.) \quad \Sigma\, p'_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}} = 0. \qquad 3.) \quad \Sigma\, p'_{\alpha\beta} \cdot q_{\alpha\beta} = 0.$$

„Wir schließen hieraus, da in den Formeln 1. und 3. die $p'_{\alpha\beta}$ von Hause aus linear unabhängige Coordinaten bedeuten, während doch 1. und 3. geometrisch für die Linie $p'_{\alpha\beta}$ dieselbe Bedingung aussagen, daß die Coefficienten, mit denen in 1. die $p'_{\alpha\beta}$ multipliciert sind, mit den entsprechenden Coefficienten von 3 proportional sein müssen, so daß wir also schreiben können:

$$\varrho \cdot q_{\alpha\beta} = \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}}.$$

Analog folgt aus der Vergleichung der Formeln 2./ und 4./:

$$x'_\alpha - p_{\alpha\beta} = \frac{\partial Q}{\partial y_{\alpha\beta}}$$

Diese Beziehungen sagen also aus, daß die Coordinaten y mit den p bis auf die Reihenfolge und einen notwendig unbestimmt bleibenden Proportionalitäts-faktor übereinstimmen.

Jetzt wollen wir etwas näher auf die Plücker'schen Ideen eingehen, die der Raumgeometrie von 1865/69 zu Grunde liegen. Wir können die Betrachtungen, die wir hier meinen, zweckmäßig durch einen Hinweis auf analoge Betrachtungen bei der Anwendung von Punktcoordinaten uns näher führen. Wenn wir eine Gleichung zwischen Punktcoordinaten aufstellen, so wissen wir, wird hierdurch eine Fläche, bei 2 Gleichungen eine Curve, bei 3 Gleichungen ein Schnittpunktsystem dargestellt. In gleicher Weise stellt nun Plücker die Frage auf, was wird durch eine, was durch 2, was durch 3, endlich durch 4 Gleichungen zwischen Liniencoordinaten definiert? Mehr als 4 Gleichungen dürfen wir wir natürlich nicht aufstellen, da ja zwischen unseren 6 homogenen Coordinaten immer noch ausserdem die Identitäts-gleichung $P=0$, resp. $Q=0$ zu gelten hat.

Es möge also gegeben sein die eine Gleichung $\Omega = 0$, die homogen in den Linienkoordinaten ist. Was stellt diese Gleichung dar? Ja, es giebt überhaupt ∞^4 gerade Linien, aus diesen greift die eine Gleichung $\Omega = 0$ ∞^3 gerade Linien heraus, die immer noch den Raum vollständig ausfüllen. Eine solche Zusammenfassung nennt man nun einen Komplex von Linien.

Haben wir die weiteren 2 Gleichungen $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ so bestimmen dieselben eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von geraden Linien, die auch noch den ganzen Raum ausfüllen, denn durch jeden Punkt dieses Raumes geht allgemein zu jeder immer noch eine (oder auch mehrere) gerade Linien der Mannigfaltigkeit. Wir können sagen, daß die ∞^3 Punkte des Raumes in bestimmter Weise in ∞^2 geraden Linien zusammengefaßt sind. Diesen Inbegriff von Linien nennt man eine Congruenz. [Es ist auch noch der ältere Name „Strahlensystem" üblich; doch ist derselbe wenig passend, da ja auch ein Linienkomplex eigentlich ein „Strahlensystem" abgiebt.].

Nehmen wir nun 3 Gleichungen:

$\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, $\Omega'' = 0$ an, so bestimmen dieselben ∞^1 gerade Linien, welche eine Fläche im Raume, eine sogenannte „Linienfläche" liefern.

Wählte man endlich 4 Gleichungen:

$\Omega = 0,\ \Omega' = 0,\ \Omega'' = 0,\ \Omega''' = 0$ zusammenstellen, so würde dies eine endliche Anzahl [∞^0] gerade Linien geben, eine Zusammenfassung, für die wir keinen besonderen Namen haben.

Nun wollen wir einen Schritt weiter gehen, indem wir in allen Fällen die Gleichung als linear voraussetzen, wir bekommen so „einen linearen Complex, eine lineare Congruenz" u. s. w. fort. Wir müssen nun etwas näher auf diese Gebilde eingehen, wobei wir uns jedoch auf die Hervorhebung einiger Haupteigenschaften derselben beschränken werden, da ein genaueres Eingehen natürlich zuviel Zeit beanspruchen würde.

Es sei also gegeben eine einzelne lineare Gleichung: $\sum a_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0$. Bei einem solchen linearen Complex verdient der Ausdruck

$a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}$, den wir abkürzend mit A bezeichnen, besonderes Interesse. Derselbe hat nämlich eine Bedeutung, die vom Coordinatensystem unabhängig ist, mit anderen Worten: er ist eine <u>Invariante</u> des linearen Complexes. Wir beschäftigen uns besonders mit dem speciellen Fall des linearen Complexes, in welchem die Invariante A verschwindet, also die Gleichung besteht:

$a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23} = 0$ [„<u>Specieller lin. Complex.</u>"]

In diesem Falle können wir die $a_{\alpha\beta}$ selbst als Coordinaten einer festen geraden Linie ansehen, indem wir setzen: $a_{\alpha\beta} = q'_{\alpha\beta}$. Denn daß die Invariante $A' = 0$ ist, kommt dann auf die Gleichung $A = 0$ hinaus, und irgend 6 Größen, die der Gleichung $A' = 0$ genügen, können wir als Linien-coordinaten q' deuten. Die Gleichung des linearen Complexes geht so über in:

$\Sigma q'_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0$; dies ist aber die Bedingung, daß die geraden Linien p und q' sich schneiden.

Hiernach besteht ein specielle lineare Complex aus der Gesammtheit aller geraden Linien, welche eine feste Raumgerade $q'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ schneiden.

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle des linearen Complexes über. Setzen wir einmal für $p_{\alpha\beta}$ in die Gleichung desselben ein: $x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta$, so bekommen wir:

$$\Sigma a_{\alpha\beta}(x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta) = 0$$

Wenn wir nun den Punkt x etwa als gegeben denken und nach solchen Punkten y fragen, die diese Gleichung befriedigen, so heißt dies mit anderen Worten:

„Die letzte Gleichung definiert bei festgehaltenem x diejenigen Punkte y, die mit x verbunden eine Linie des Complexes bilden."

Bemerken wir nun, daß dies eine lineare Gleichung

für die y ist, die für $y = x$ befriedigt ist, so lesen wir unmittelbar aus unserer Gleichung ab, daß diese Punkte y eine Ebene ausfüllen, welche durch den Punkt x hindurchgeht. Als weitere Folgerung ergiebt sich hieraus die Fundamentaleigenschaft des linearen Complexes:

„Im linearen Complex enthält durch jeden Punkt ein ebenes Strahlbüschel von Complexlinien."

Wir können einen linearen Complex in Rücksicht auf die zuletzt angeführte Gleichung noch anders definieren. Setzen wir nämlich fest, daß $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ sein soll, woraus von selbst folgt: $a_{\alpha\alpha} = 0$, dann können wir die Gleichung auch schreiben:

$$\sum_1^4 \sum_1^4 a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0.$$

„Eine solche Gleichung nennt man überhaupt eine bilineare Gleichung, und ihre linke Seite nennt man eine bilineare Form, und ist im speciellen, wie hier, $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, so nennt man die linke Seite eine schiefe bilineare Form. (forme gauche)."

Unter Anwendung dieser Redeweise können wir dann sagen:

„Ein linearer Complex im Raume entsteht, wenn man eine schiefe bilineare Form der x und y gleich 0 setzt."

Dieser Satz bezweckte zu zeigen, unter wie ver-

verschiedenen Gesichtspunkten der lineare Complex, eines der wichtigsten Grundgebilde der projektiven Geometrie des Raumes, betrachtet werden kann. Näher hier auf die Gruppierung seiner Linien einzugehen, würde zu weit führen; wir bemerken nur noch, daß, wer sich dafür interessiert, in dem Vorlesungshefte W. 18 $^{84}/_{85}$ „algebraische Curven und Flächen," gegen Schluß kurz die Elemente der Liniengeometrie behandelt findet.

Gehen wir nun über zur linearen Congruenz; es sei gegeben:

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0, \quad \Sigma\, b_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0.$$

Die diesen beiden Complexen gemeinsamen Linien sind nun natürlich auch dem ganzen Büschel:

$\lambda \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} + \mu \Sigma\, b_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} = 0$ gemeinsam. Nun wollen wir die Invariante A dieses allgemeinen Complexes berechnen. Wir setzen zur Abkürzung:

$a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = A_{11}$ / Invariante des ersten Complexes.)

$a_{12}\, b_{34} + b_{12}\, a_{34} + a_{13}\, b_{42} + b_{13}\, a_{42} + a_{14}\, b_{23} + b_{14}\, a_{23} = 2\, A_{12}$.

$b_{12}\, b_{34} + b_{13}\, b_{42} + b_{14}\, b_{23} = A_{22}$ / Invariante des zweiten Complexes.)

Es ist dann die Invariante eines beliebigen Complexes der obigen Schaar:

$$A = A_{11}\, \lambda^2 + 2\, A_{12}\, \lambda\mu + A_{22}\, \mu^2.$$

Wir fragen nun: Giebt es unter diesen Complexen

der Schaar specielle Complexe mit verschwindender Invariante? Um dies zu beantworten, setzen wir $A = 0$ und bekommen eine quadratische Gleichung zwischen λ und μ:

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0$$

In betreff der linken Seite derselben, die eine binäre quadratische Form darstellt, haben wir im vorigen Semester gesehen, dass wir 3 Fälle gemäss des Verhaltens der Determinante der Coefficienten:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

zu unterscheiden haben.

1. Es sei $D \geq 0$.
2. Es sei $D = 0$, jedoch nicht sämmtliche Unter-Determinanten $A_{ik} = 0$.
3. Es seien sämmtliche $A_{ik} = 0$.

Da nun jeder Wurzel der Gleichung $A = 0$ ein specieller Complex entspricht, so erkennen wir sofort:

Im ersten Falle ($D \geq 0$) sind in der Schaar der linearen Complexe 2 specielle enthalten, und die lineare Congruenz besteht aus allen Raumeraden, welche 2 feste Leitlinien treffen." Wir fahren sogleich fort:

„Der zweite Fall ist ein Grenzfall, der aus dem allgemeinen entsteht, indem die beiden Leitlinien

einander unendlich nahe rücken."

Was besagt nun der dritte Fall ($A_{ik} = 0$)?
In diesem Falle sind die beiden Complexe:
$\Sigma a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ und $\Sigma b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ selber specielle Complexe, der eine Complex besteht daher aus allen Raumgeraden, die eine feste Gerade schneiden, dasselbe gilt auch für den zweiten Complex. Die Bedingung $A_{12} = 0$ bedeutet dann, daß die beiden festen Geraden sich ihrerseits schneiden. Wir haben so den Satz:

Im dritten Falle, werden wir sagen, haben wir eine sogenannte „zerfallende Congruenz" bestehend 1.) aus allen geraden Linien, die in einer festen Ebene liegen, sowie 2.) aus denjenigen, die durch einen in der Ebene enthaltenen festen Punkt hindurchlaufen."

Diese Congruenz hat ∞ viele Leitlinien, das ist das ganze Büschel von Linien, die gleichzeitig in der Ebene liegen und durch den Punkt laufen."

Nun haben wir noch einiges zu sagen über die Linienflächen, die drei Complexen angehören:
$\Sigma a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$; $\Sigma b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$; $\Sigma c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$.
Diese 3 Complexe haben ∞^1 gemeinsame Linien, welche aber auch der dreigliedrigen Schaar von Complexen angehören:
$\lambda \Sigma a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \mu \Sigma b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \nu \Sigma c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$.
Wir berechnen uns wieder die Invariante A für

einen beliebigen Complex dieser Schaar und fragen uns dann, ob wieder specielle Complexe in dieser Schaar enthalten sind. Es ist nun die Invariante:

$$A - \lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22} + 2\lambda\nu A_{13} + 2\mu\nu A_{23} + \nu^2 A_{33}.$$

Dieselbe ist eine ternäre quadratische Form der λ, μ, ν. Die Eintheilung dieser Formen gründet sich, wie wir im vorigen Semester lernten, auf die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Wir wollen in dieser Hinsicht hier blos auf den allgemeinsten Fall $D \geq 0$ eingehen, um nicht zu viel Einzelheiten zu erörtern. In allen Fällen giebt es eine ganze Schaar specieller Complexe, die durch die Gleichung $A = 0$ bestimmt werden.

Hieraus folgt schon:

„Die ∞ vielen Erzeugenden unserer Linienfläche begegnen ∞ vielen festen Leitlinien, welche durch unsere quadratische Gleichung des Raumes festgelegt werden."

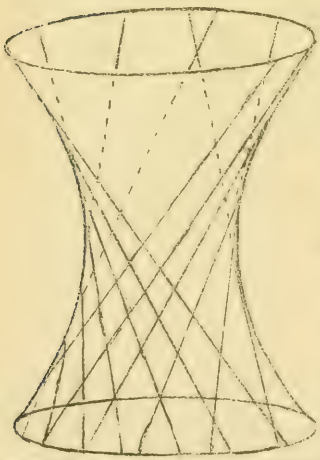
Ist nun insbesondere $D \geq 0$, so folgt des weiteren, wie wir hier nicht besonders ausführen:

„Im Falle $D \geq 0$ ist unsere Linienfläche eine nicht zerfallende Linienfläche zweiten Grades."

Dieser Satz appelliert freilich gleich an eine gewisse

geometrische Kenntnis. Eine jede Fläche 2ten Grades ist, algebraisch zu reden, eine Linienfläche der hier in Betracht kommenden Art. Aber es giebt nur 2 Flächen 2ten Grades, welche reelle gerade Linien enthalten. Es sind dies: das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Betrachten wir z. B. genauer das einschalige Hyperboloid. Es ist aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt, dass dasselbe zwei Schaaren von graden Linien*) trägt, eine jede gerade Linie der einen Schaar wird von allen Geraden der zweiten Schaar geschnitten und umgekehrt. Wir erkennen daher:

Fig. 2.



In der That trägt eine Fläche 2ten Grades (einschaliges Hyperboloid) 2 Schaaren geradliniger Erzeugenden, und wenn wir die Linien der einen Schaar als festgegebene Leitlinien betrachten, so können wir die Linien der anderen Schaar definieren als diejenigen Geraden des Raumes, welche den sämmtlichen festen Leitlinien begegnen." [also gemeinsame Transversalen der

*) In der Figur stellen sich die beiden Schaaren der geraden Linien dar als Tangenten (Asymptoten) der äusseren hyp. Begrenzung.

sämmtlichen festen Leitlinien sind.]

„Hiernach haben 3 lineare Complexe, deren Determinante D nicht verschwindet, die eine Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids bezw. einer Fläche zweiten Grades gemein."

Des Näheren stellt sich die Sache so, daß jedesmal ein Hyperboloid resp. hyperbolisches Paraboloid herauskommt, wenn die 3 geg. Complexe reell sind, sind sie aber imaginär (haben sie imaginäre Coefficienten), so kann jede eigentliche Fläche 2. Grades resultieren.

Jetzt wollen wir nachträglich von der linearen Congruenz noch einiges berichten. Wir haben gesehen, daß die Schaar der linearen Congruenzen:

$\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22} = 0$, so lange $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \gtrless 0$ ist.

2 Leitlinien besitzt. Nun können diese Leitlinien aber imaginär sein. Wie ist nun eine solche lineare Congruenz mit 2 konjugiert imaginären Leitlinien gestaltet? (Wir stellen diese Frage besonders deswegen, weil wir in diesem Semester uns viel mit imaginären Linien zu beschäftigen haben werden.) Wir wollen auf diese Frage eine Antwort geben ohne weiteren Beweis. Fassen wir einmal eine ganze Schaar von einschaligen Rotationshyperboloiden ins Auge. Dieselbe werde dargestellt durch die Gleichung:

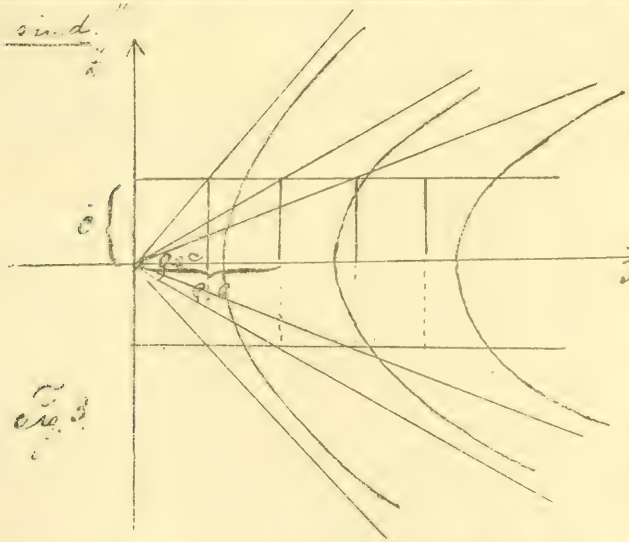
$\frac{x^2+y^2}{\xi^2} = z^2 + c^2$, wo c eine gegebene Constante, ξ ein veränderlicher Parameter ist. *) Wir wollen uns die Meridiane dieser Rotationsfläche, die man erhält, wenn man $y=0$ setzt, zeichnen. Die Nebenaxe der Meridianhyperbel ist hiernach gegeben durch $\pm c$, die Hauptaxe dagegen durch $\pm \xi c$, wo ξ beliebig ist. Bestimmt man die Punkte, deren x- und z-Coordinaten $\pm c$ und $\pm \xi c$ sind, so geben diese die Richtungen der beiden Asymptoten an nach einer bekannten Construktion. (v. Fig. 3.) Wir erhalten so eine ganze Schaar von Hyperbeln, die wir nur um die gemeinsame z-Axe zu drehen brauchen, um die Rotationshyperboloide unserer Gleichung zu erhalten. (Diese Hyperboloide sind für kleines ξ schmal und langgestreckt, mit wachsendem ξ werden dieselben breiter, zugleich aber auch flacher.) Jedes dieser Hyperboloide trägt nun ein System von Erzeugenden der einen und der anderen Art. Betrachten wir die Erzeugenden etwa als Tangenten von Schraubenlinien, deren Axe die z-Axe ist, so können wir die beiden Arten als die der rechtsgewundenen und die der linksgewundenen unterscheiden, ganz analog wie man die Schraubenlinien unterscheidet.

---

*) $\xi = \infty$ gibt das Rotationscylinderoid, und wir für $\xi = 0$ die Zeichnung eines Kreises erhalten.

Durch jeden Punkt des Raumes geht nun wenn wir uns für die eine oder die andere Schaar Erzeugender entscheiden, nur eine derselben hindurch, da ja auch nur ein Hyperboloid den Punkt enthält. Wir werden dann sagen:

„Eine lineare Congruenz mit 2 konjugirt imaginären Leitlinien erhält man beispielsweise, wenn man ein System einschaliger koaxialer Rotations hyperboloide betrachtet, welche eine reelle Nebenaxe C haben, und nun auf diesen Hyperboloiden die sämmtlichen Erzeugenden erster oder zweiter Art ins Auge fasst, d. h. die sämmtlichen Erzeugenden welche gegen die Rotationsaxe rechts herum oder links herum orientiert sind."



Wir kommen so zur Unterscheidung von rechts und links gewundenen Congruenzen.

Schon bei dem einzelnen Hyperboloid sind die aufeinander folgenden Erzeugenden der einen Art als gegen einander rechts herum gewunden, die auf

einander folgenden Erzeugenden der anderen Art als links herum gewundene zu bezeichnen.

Dies werden wir nun auf lineare Congruenzen übertragen:

„So werden wir überhaupt die linearen Congruenzen mit imaginären Leitlinien einteilen müssen in rechts gewundene und in links gewundene Congruenzen.“

Sind nämlich überhaupt einmal irgend 2 auf einanderfolgende Linien einer solchen Congruenz links gegen einander gewunden, so werden es je 2 sein, weil ein Uebergang zu links gewundenen Linien nur durch schneidende Linien hindurch erfolgen könnte, keine 2 Linien einer linearen Congruenz mit imaginären Leitlinien sich aber im Reellen schneiden.

Analytisch aber spiegelt sich dies in folgendem ab:

Wenn unsere Gleichung $\Delta = 0$ imaginäre Wurzeln hat, dann ist für alle reellen λ und μ der Ausdruck $\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22}$ entweder positiv oder negativ, nie $= 0$. Wir sagen, der Ausdruck ist eine definite quadratische Form, und zwar entweder eine positive oder eine negative definite quadratische Form.

Die Behauptung ist nun diese:

Die Unterscheidung rechts herum und links herum gewundener Kongruenzen geht mit der anderen Unterscheidung parallel, ob unsere quadratische binäre Form:

$$\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22},$$ die jedenfalls definit ist, eine positiv oder eine negativ definite Form ist."

Im einzelnen wäre nun die Frage, ob die rechts gewundenen Kongruenzen einer positiv definiten oder einer negativ definiten Form entsprechen. Es kommt dies nun ganz auf die gewählte Reihenfolge der Koordinaten an.*); wir schneiden diese Unentschiedenheit ab mit den Worten:

„Wir wollen hinfort annehmen, unser Koordinatensystem sei so gewählt worden, daß den positiv definiten Formen rechtsgewundene, den negativ definiten Formen linksgewundene Kongruenzen entsprechen."

Wir können diese Verhältnisse hier natürlich nur eben anführen. Wir bemerken noch, daß über unendlich nahe benachbarte Strahlen eine besondere Dissertation geschrieben ist von:

Königs, „sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé."

*) Wir können zweierlei Koordinatentetraeder unterscheiden, je nachdem die Reihenfolge 1, 2, 3, 4 der Koordinatenpunkte eine rechts herum oder links herum geordnete Folge bilden.

Dieselbe findet sich abgedruckt in den Annales de l'école normale supérieure. 1882.

Wir gehen nun zu der Frage der imaginären Raumelemente über, indem wir uns darüber klar werden, was wir unter einem imaginären Punkt, einer imaginären Ebene oder geraden Linie zu denken haben.

Sprechen wir zunächst vom imaginären Punkt. Die Verhältnisse sind hier ganz analog denen, wie wir sie für den imaginären Punkt in der Ebene kennen gelernt haben. Die Coordinaten $x_a = y_a + i z_a$ setzen sich je zusammen aus einem reellen und einem imaginären Teil, die wir für sich als Coordinaten zweier Punkte y und z deuten werden. Der Punkt X liegt dann auf der Verbindungslinie derselben und auf derselben Linie liegt auch der Punkt:

$$\bar{x}_a = y_a - i z_a .$$

Dies giebt uns den Satz (vgl. den analogen Satz für die Ebene):

„Jeder imaginäre Punkt liegt mit seinem konjugirt imaginären zusammen auf einer bestimmten reellen geraden Linie des Raumes."

Wir können in Folge dessen ohne Weiteres sagen, wie man nach v. Staudt diese imaginären Punkte reell deuten kann. Man sagt: es giebt eine Involution

zweiter Art auf der Verbindungsgeraden, welche diese beiden Punkte zu Doppelpunkten hat, so daß wir die beiden Punkte geradezu so denken können: „Eine reelle gerade Linie und auf ihnen eine elliptische Involution" Auch wie die beiden so definierten Punkte von einander zu unterscheiden sind, ist im vorigen Semester eingehend erläutert: es geschieht, indem man der reellen geraden Linie, welche die elliptische Involution trägt, noch einen Pfeil beisetzt, um den einzelnen Punkt zu bezeichnen.

Was nun imaginäre Ebenen $u_a = v_a + i w_a$ angeht, so sind die Verhältnisse hier den eben besprochenen natürlich ganz analog. Eine imaginäre Ebene $u_a = v_a + i w_a$ enthält eine reelle Linie, durch welche auch die konjugiert imaginäre Ebene hindurchgeht, und die reelle Linie trägt ein Ebenenbüschel, indem wir eine elliptische Involution und einen Sinn zur Bezeichnung und Unterscheidung konjugiert imaginärer Ebenen festlegen werden.

Wir werden uns nun den imaginären Linien im Raume zuzuwenden haben. Nehmen wir einmal einen reellen Punkt im Raume an und fragen uns, wie viel imaginäre Linien durch denselben hindurchgehen. Offenbar wird in jeder reellen Ebene, die jenen ausgewählten Punkt enthält, eine zweifach unendliche

Mannigfaltigkeit solcher imaginären geraden Linien;
also, da ∞^2 reelle Ebenen durch jenen Punkt gehen,
wird eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit
imaginärer gerader Linien existieren, die jenen Punkt
als Träger haben. Da wir ferner dem reellen Punkt
dreifach unendlich viele Lagen im Raume geben kön-
nen, so haben wir den Satz:

„Wir finden im Raume ∞^7 komplexe gerade Linien,
welche einem reellen Strahlenbüschel angehören,
also ihre konjugierte Gerade schneiden und mit ihr
den Mittelpunkt und die Ebene des Strahlenbüschels
gemein haben."

Damit haben wir aber unmöglich die Gesamtheit aller imaginären geraden Linien des Raumes erschöpft. Denn eine gerade Linie hängt von 4 Constanten ab, die, da sie je in einen reellen und imaginären Bestandteil gespalten werden können, auf ∞^8 imaginäre gerade Linien schließen lassen. Wir haben also erst ∞^7 hier nachgewiesen.

„Auf Grund dieser Abzählung zerfallen die imaginären geraden Linien daher in 2 Arten, in die specielle Art die wir bereits erwähnten, welche einen reellen Punkt und eine reelle Ebene besitzt und in die allgemeine Art, bei der dies nicht der Fall ist, — oder indem wir den Gegensatz anders fassen —

es sie speciellen sich gerader Linien, die ihre konjugiert imaginären Geraden schneiden und in solche, welche es nicht thun."

Denn es ist klar, daß, wenn zwei konjugiert imaginäre Gerade sich schneiden, der Schnittpunkt wie die beide verbindende Ebene nur reell sein kann.

Für die beiden so unterschiedenen Arten imaginärer Linien giebt es keinen allgemein gebräuchlichen terminus technicus, wir wollen sie demnach als die wider-imaginären und die hoch-imaginären bezeichnen, indem wir etwa daran denken, daß die imaginären Geraden mit einem reellen Grundgebilde uns fassbarer erscheinen als die anderen.

Wir wollen nun diese gewonnenen analytischen Schlüsse aufgebauten Betrachtungen analytisch bestätigen.

Es seien die Coordinaten einer imaginären Linie gegeben durch $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + i\, s_{\alpha\beta}$.

Wir wollen nun für folgende Ausdrücke, die wir fortgesetzt gebrauchen werden, die hinzugefügten Abkürzungen einführen.

Wir setzen:

$$r_{12}\, r_{34} + r_{13}\, r_{42} + r_{14}\, r_{23} = (r, r).$$

$$s_{12}\, s_{34} + s_{13}\, s_{42} + s_{14}\, s_{23} = (s, s).$$

$$r_{12}\, s_{34} + r_{34}\, s_{12} + r_{13}\, s_{42} + r_{42}\, s_{13} + r_{14}\, s_{23} + r_{23}\, s_{14} = 2(r, s) = 2(s, r).$$

Die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, daß unsere Coordinaten $p_{\alpha\beta}$ wirklich einer geraden Linie angehören, lautet dann:

$$(p,p) = 0 = (r+is, r+is)$$

oder, wenn wir diesen Ausdruck nach dem Reellen und Imaginären entwickeln:

$$(r,r) - (s,s) + 2i(r,s) = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich in die beiden Bedingungen:

$$(r,r) - (s,s) = 0$$
$$(r,s) = 0$$

„Sollen also die Größen $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + is_{\alpha\beta}$ eine gerade Linie bedeuten, so muß $(r,r) = (s,s)$, und $(r,s) = 0$ sein.

Fragen wir uns nun weiter, wann die so bestimmte gerade Linie $p_{\alpha\beta}$ denn ihre conjugiert imaginäre Gerade $r_{\alpha\beta} - is_{\alpha\beta}$ schneidet? Dazu muß gemäß früherer Auseinandersetzungen:

$$(r+is, r-is) = 0 \text{ sein.}$$

Dies giebt, wenn wir den Ausdruck links entwickeln, die Bedingung:

$$(r,r) + (s,s) = 0.$$

Also ihr und $(r,r) - (s,s) = 0$ folgt alsdann:
$(r,r) = (s,s) = 0$ als Bedingung für das Schneiden zweier konjugiert imaginären Geraden. Wir können daher als analytisches Kriterium aufstellen.

„Die erste Art, die der nieder-imaginären Geraden, ist dadurch charakterisiert, daß $(r,r)-(s,s)=0$ ist, was aber keineswegs nötig ist. Vielmehr sind bei den hoch-imaginären Geraden diese Ausdrücke $(r,r)-(s,s) \gtrless 0$, d. h. von Null verschieden."

Hieraus resultiert des ferneren eine weitere Einteilung der imaginären geraden Linien zweiter Art in solche, für die $(r,r)-(s,s)>0$ und in solche, für die $(r,r)-(s,s)<0$ ist. Worauf die Unterscheidung hinzielt, werden wir gleich sehen.

Wir wollen vorab allgemein auf diejenigen reellen Geraden unser Augenmerk richten, welche unsere imaginären Linien $(r+is)$ schneiden.

Es sei p die reelle bewegliche Gerade, dann muß sein:

$$(r+is,p)=0 \text{ oder entwickelt:}$$
$$(rp)+i(sp)=0$$

Soll nun p eine reelle Gerade sein, so muß einzeln:

$$(rp)=0 \text{ und}$$
$$(sp)=0 \text{ sein.}$$

Auf dieselben Gleichungen kommen wir natürlich auch, wenn wir von der konjugiert imaginären Geraden $r-is$ ausgegangen wären. Wir haben so den Satz:

„Alle reellen Geraden, die eine von 2 konjugiert imaginären geraden Linien schneiden, schneiden auch die

[illegible], und genügen dabei den beiden reellen Gleichungen:

$$(r,p) = 0 \quad \text{und} \quad (s,p) = 0."$$

Diese Gleichungen definieren aber 2 lineare Complexe oder eine lineare Congruenz über die wir letzthin ausführlich gesprochen haben. Wollen wir die Einteilung der linearen Congruenzen, wie wir sie in letzer Vorlesung gegeben haben, hier anwenden, so werden wir zu setzen haben:

$$(r,r) = \mathfrak{A}_{11}, \quad (r,s) = \mathfrak{A}_{12}, \quad (s,s) = \mathfrak{A}_{22}.$$

Es ist dann in unserem Falle:

$$\mathfrak{A}_{12} = 0, \quad \mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}_{22}.$$

Nun werden wir imaginäre Gerade $r \pm is$ erster und zweiter Art unterscheiden.

1.) Im ersten Falle ist ausserdem:

$\mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}_{22} = 0$. Diese Gleichungen führen aber auf eine zerfallende Congruenz. Wir haben daher das Resultat, welches allerdings ganz selbstverständlich ist, sofern man nur darüber nachdenkt:

„Die reellen geraden Linien welche 2 konjugiert imaginäre gerade Linien der ersten Art schneiden, bilden eine zerfallende Congruenz."

[Strahlenbündel und Geradenfeld.].

2.) Im zweiten Falle ist aber: $\mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}_{22} \gtrless 0$.

Da dann sicher stets $\mathfrak{A}_{12}^2 - \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{22} \gtrless 0$ ist, so

bekommen wir nie den Fall, wo die zwei Directricen unendlich nahe gerückt sind, vielmehr ergiebt sich das Resultat:

„Sind die beiden geraden Linien $r \pm is$ von der zweiten Art, so haben wir eine allgemeine lineare Congruenz mit 2 getrennten Axlinien, nämlich unseren imaginären Geraden $r \pm is$."

Diese allgemeine lineare Congruenz mit imaginären Axlinien haben wir aber gerade ausführlicher betrachtet. (Vgl. pag. 36.) In Rücksicht auf die Ausführungen daselbst werden wir jetzt leicht zwischen den imaginären Geraden zweiter Art, für die $(r, r) = (s, s) > 0$ und für die $(r, r) = (s, s) < 0$ ist, scheiden können.

„Die beiden Unterarten, $(r, r) = (s, s) \gtrless 0$ sind nämlich dadurch zu unterscheiden, daß das eine Mal die selben Transversalen von $r \pm is$ eine rechts gewundene Congruenz bilden, das andere Mal eine links gewundene Congruenz, — und zwar ist im ersten Falle $(r, r) = (s, s) > 0$, im zweiten $(r, r) = (s, s) < 0$, (gemäß unserer Verabredung über die Reihenfolge der Coordinaten.).

„Dementsprechend wollen wir die imaginären geraden Linien $(r, r) = (s, s) > 0$ selbst als links gewundene gerade Linien bezeichnen und $(r, r) = (s, s) < 0$ selbst als rechts gewundene, entsprechend dem Fall, daß die Axlinien der rechts gewundenen Schaar von Erzeugenden eines

einschaligen Hyperboloids selbst links gewunden sind und umgekehrt).

Wir wollen hier noch ausdrücklich betonen, dass, wenn $r+is$ eine rechts gewundene imaginäre gerade Linie ist, nicht $r-is$ links gewunden ist, sondern vielmehr: bleibt beim Wechsel von $+i$ und $-i$ diese Unterscheidung der hoch-imaginären Geraden in 2 Unterarten ungeändert erhalten.

Wir wollen nun noch eine historische Bemerkung hinzufügen. v. Staudt hat sich in seiner „Geometrie der Lage" die Aufgabe gestellt, auch für die imaginären Geraden im Raume eine reelle Interpretation zu finden. *)

„Was die imaginären Geraden erster Art anbelangt, so interpretiert v. Staudt dieselben selbstverständlich durch ein reelles Strahlbüschel, auf welchem eine elliptische Involution und ein Sinn (ein Pfeil) gegeben ist."

„Um nun auch die imaginären Geraden der zweiten Art zu versinnlichen, denkt sich v. Staudt die Congruenz der reellen Transversalen konstruiert, und des weiteren auf jeder einzelnen dieser Transversalen die elliptische Involution, die zu den beiden Vereinigtpunkten mit $r \pm is$ zugehört und endlich den Sinn, der zu dem einen dieser beiden Schnittpunkte hinweist."

Hiermit wollen wir unsere Betrachtungen imaginärer

*) v. Staudt ist wohl überhaupt der Erste, der die imaginären Raumgeraden systematisch in Betracht gezogen hat.

Raumes und zugleich das Capitel, welches von den Punkten, Ebenen und geraden Linien des Raumes handeln sollte, beenden.

Wir behandeln in einem

zweiten Capitel:

Die Flächen zweiten Grades.

Diese Betrachtungen werden auch etwas mannigfaltig gestalten, da wir von den Flächen zweiten Grades nur genau Bescheid wissen müssen, um die Cayley'sche Maassbestimmung des Raumes späterhin voll und ganz zu verstehen.

Wir stellen an die Spitze die Gleichungen:

$$1.\ \sum a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = 0, \qquad 2.\ \sum a_{ab}\, u_a\, u_b = 0,$$

von denen die erste die Fläche 2ter Ordnung (in Punktcoordinaten), die zweite die Fläche zweiter Klasse (in Ebenencoordinaten) darstellt. Wir werden weiterhin die Gleichung 1 bevorzugen, doch zunächst beide Gleichungen betrachten.

Wir werden zunächst die Gesichtspunkte ins Auge fassen, die wir als zur

algebraischen Theorie der Flächen 2. Grades

gehörend anzusehen haben. Das Wort „algebraisch" soll ausdrücken, daß wir zunächst gleichgültig sein wollen gegen den Unterschied von Reellem und Imaginärem, der uns erst später interessieren wird: wir dürfen uns in dem zunächst Folgenden die Coefficienten a, a unserer Gleichungen selber als complex denken, während sie später als selbstverständlich reell angesehen werden sollen.

Das erste, was wir uns in Bezug auf unsere Flächen zweiten Grades entwerfen, ist eine Theorie der Polarverwandtschaft. Wir ordnen jedem Punkte x eine Polarebene zu in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung, und jeder Ebene u einen Pol in Bezug auf die Fläche 2ter Klasse. Die Polarverwandtschaft ist gegeben, durch:

$$\varrho\, u_\alpha = \Sigma\beta\; a_{\alpha\beta} x_\beta \text{ und}$$

$$\sigma\, x_a = \Sigma b\; a_{ab} u_b, \text{ wo } u_a \text{ resp. } x_a \text{ die}$$

Polarebene resp. der Pol zu dem gegebenen Punkte x_b resp. der gegebenen Ebene u_b ist. Alles das ist nach den früheren Entwickelungen über ebene Curven 2ten Grades selbstverständlich!

Ferner werden wir entsprechend dieser Polarverwandtschaft die Flächen 2ten Grades einteilen und zwar nach der Art der Determinanten aus den $a_{\alpha\beta}$ resp. a_{ab}.

Wir setzen also:

$$\mathfrak{D} = |a_{\alpha\beta}|\,; \quad \Delta = |a_{ab}|\,.$$

Wir haben dann, was die Ordnungsflächen angeht, folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $D \geq 0$. ..... Allgemeine Fläche zweiter Ordnung.
2. $D = 0$, jedoch sollen nicht sämmtliche ersten Unterdeterminanten $D_{\alpha\beta} = 0$ sein. ..... Kegel.
3. Alle $D_{\alpha\beta} = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung $D_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. ..... Ebenenpaar.
4. Alle $D_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, aber nicht alle dritten Unterdeterminanten, d. h. nicht sämmtliche Elemente $a_{\varrho\sigma} = 0$. ..... Doppelebene.
5. Alle $a_{\alpha\beta} = 0$. ..... Gesammtraum = Identität.

Entsprechend gliedern sich die Klassenflächen in:

1. $\Delta \geq 0$. ..... Allgemeine Fläche zweiter Klasse.
2. $\Delta = 0$, jedoch nicht alle $\Delta_{\alpha\beta} = 0$. ..... Curve 2. Klasse. *)
3. $\Delta_{\alpha\beta} = 0$, nicht alle $\Delta_{\beta\gamma} = 0$. ..... Punktepaar.
4. $\Delta_{\alpha\beta\gamma} = 0$, nicht alle $a_{\varrho\sigma} = 0$. ..... Doppelpunkt.
5. alle $a_{\alpha\beta} = 0$. ..... Identität.

Wir erinnern nun, wie wir im vorigen Semester für die Curven zweiter Klasse die entsprechende Ordnungsgleichung und für die Curve zweiter Ordnung die Klassengleichung aufgestellt hatten. Die analoge Aufgabe wollen wir für die Flächen zweiten Grades behandeln und uns fragen, wie bilden wir die

*) d. h. sämmtliche Tangentialebenen, die eine Curve 2. Klasse berühren. Entsprechendes gilt für 3. und 4.

Klassengleichung einer Fläche zweiten Grades aus einer Ordnungsgleichung und umgekehrt?
Es ergiebt sich hier für die Verwandlung der Ordnungsflächen folgendes Resultat:

Die allgemeine Fläche zweiter Ordnung geht in die allgemeine Fläche zweiter Klasse über, der Kegel verwandelt sich in einen Doppelpunkt, nämlich die doppelt zählende Spitze des Kegels, das Ebenenpaar dagegen, sowie die Doppelebene und natürlich die Identität selber führen, in Klassengleichungen ausgedrückt, zur Identität.

Analoges gilt für die Verwandlung der Klassengleichungen in Ordnungsflächen, wie folgendes Schema zusammenstellend zeigen möge:

Ordnungsflächen:		Klassenflächen:
1. Allgem. Fläche 2. Ordn.	⟷	Allgem. Fläche 2. Klasse.
2. Kegel.	⟷	Curve 2. Klasse. *)
3. Ebenenpaar.	⟷	Punktepaar.
4. Doppelebene.	⟷	Doppelpunkt.
5. Identität.	⟷	Identität.

Diese Verhältnisse haben wir nun durch analytische Rechnung zu stützen.

*) Die Curve 2. Klasse z.B. liefert in Punktcoordinaten dargestellt eine Doppelebene, nämlich die doppelt gezählte Ebene der Curve selbst.

Um die Gleichung einer Fläche, die in Punkt-coordinaten $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ gegeben ist, in Ebenen-coordinaten darzustellen, machen wir einen ganz analogen Ansatz wie in der entspr. Aufgabe der Geometrie in der Ebene.

Es ist, wie wir sahen:

1.) $\Sigma^3 a_{\alpha\beta} x_\beta - \varrho u_\alpha = 0$, wo unter u_α die Ebene zu verstehen ist, die zu einem gegebenen Punkte x in Bezug auf die Ordnungsfläche polar ist. Liegt jetzt der Punkt x auf der Fläche, so geht die Polarebene durch ihn hindurch, — denn dieselbe wird die Tangential-ebene in diesem Punkte an die Fläche — es ist also:

2.) $\Sigma u_\beta x_\beta = 0$. Die 4 Gleichungen 1.) und die Gleichung 2.) zusammen definieren alsdann eine Tangentialebene u_α. Wenn wir daher aus diesen Gleichungen die x_β und ϱ eliminieren, so werden wir die Bedingung bekommen, unter welcher u_α Tangentialebene unserer Fläche ist. Dieselbe lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese 5 gliedrige Determinante, gleich 0 gesetzt, giebt

alsdann die verlangte Klassengleichung für unsere gegebene Ordnungsfläche. Wir können dieselbe, indem wir nach den $u_a u_b$ entwickeln, auch darstellen durch:

$\Sigma D_{ab} u_a u_b = 0$, d.h. mit dem Produkt $u_a u_b$ ist gerade die erste Unterdeterminante D_{ab} multiplicirt.

Da nun für die Fälle 3, 4, 5 der Ausnahmeflächen (pag. 50) sämmtliche $D_{ab} = 0$ sind, so haben wir als Resultat unserer Rechnung jedenfalls dies:

„Indem die Gleichung einer Ordnungsfläche in Ebenencoordinaten $\Sigma D_{ab} u_a u_b = 0$ wird, ergiebt sich ohne weiteres, daß in der That ein Ebenenpaar, eine Doppelebene oder eine identisch verschwindende Gleichung 2ter Ordnung eine identisch verschwindende Klassengleichung ergiebt."

Wir fahren fort, indem wir so sagen:

„Die volle Begründung unseres Schemas ergiebt sich nun, wenn wir die Sätze über adjungierte Determinanten in Betracht ziehen, d.h. die Sätze über sogenannte Determinanten, die sich aus den Unterdeterminanten D_{ab} der a_{ik} als Elementen bilden lassen."

Natürlich können wir in dieser ganzen Entwickelung die x, a, Δ beziehungsweise durch die u, α, Δ ersetzen.

Dies alles wollen wir jetzt nun im einzelnen nicht weiter verfolgen; wir beziehen uns auf die Vorlesung des Wintersemesters, in der wir die analogen Betrachtungen angestellt haben. In der That haben wir dies Einzelheiten weiterhin auch kaum nötig.

„Weiterhin nämlich beschäftigen wir uns fast ausschließlich mit allgemeinen Flächen jeweder Ordnung oder Klasse, bei denen keinesweges jedem Punkte eine bestimmte Polarebene, wie andererseits jeder Ebene ein bestimmter Pol zugeordnet ist."

Wenn also im Folgenden nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist, werden wir immer annehmen, daß eine allgemeine F_2 gegeben sei.

Wir wollen jetzt einen Punkt x annehmen, dem wir eine Polarebene u zuordnen durch die Gleichung: $\varrho u_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \cdot x_\beta$, und einen zweiten Punkt y, dem wir die Polarebene v zuordnen durch: $\varrho v_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \cdot y_\beta$.

Dann ist offenbar:

$$\varrho (u_\alpha + \lambda v_\alpha) = \sum_\beta a_{\alpha\beta} (x_\beta + \lambda y_\beta).$$

Die Punkte $x_\alpha + \lambda y_\alpha$ sind nun, wie wir wissen, Punkte auf der Verbindungslinie von x_α und y_α, während die Ebenen $u_\alpha + \lambda v_\alpha$ dem Ebenenbüschel angehören, dessen Träger die Schnittgrade der Ebenen u_α und v_α ist. Wir haben so den Satz:

„Rückt der Pol auf einer geraden Linie fort, so dreht sich die zugehörige Polarebene um eine zweite gerade Linie."

„Man nennt solche 2 gerade Linien im Raume reciproke Polaren, weil umgekehrt, wenn der Pol auf der zweiten geraden Linie sich bewegt, die Polarebene sich um die erste gerade Linie dreht."

Wie werden wir die letzte Behauptung nun beweisen? Drücken wir zunächst überhaupt einmal aus, daß zwei Punkte x und y so liegen, daß der eine Punkt z. B. x auf der Polarebene des anderen y liegt.

Da die Coordinaten der Polarebene von y gegeben sind, durch $\xi v_\alpha = \Sigma a_{\alpha\beta} y_\beta$, so ist die Gleichung derselben:

$$\Sigma v_\alpha x_\alpha = 0.$$

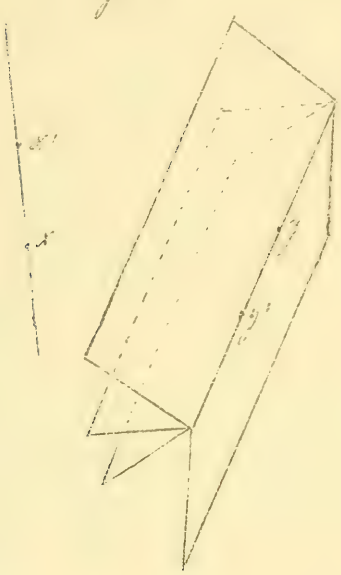
oder für v_α einen Wert eingesetzt:

$\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$. Diese Gleichung giebt uns dann die Bedingung, der die Coordinaten des Punktes x_α genügen müssen, damit dieser auf der Polarebene von y_α liegt.

Da aber $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$ in Bezug auf x_α und y_β symmetrisch ist (es ist $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$), so giebt diese Gleichung zugleich die Bedingung, der der Punkt y_α genügen muß, um auf der Polarebene von x_α zu liegen. Wir haben sodann für die

Polarenverwandtschaft fundamentalen Satz:
„Liegt y auf der Polarebene von x, so liegt auch x auf der Polarebene von y."

Fig. 4.



Hieraus ergiebt sich aber sofort unsere Behauptung betr. die reciproken Polaren. Ist nämlich die gerade Linie yy' Schnitt der Polarebenen von x und x', so wird die gerade Linie xx' ebensowohl Schnitt der Polarebenen von yy' sein.

Soviel über die algebraische Theorie der Flächen 2ten Grades. Ausführlicher hierauf einzugehen verbietet der Charakter einer Einleitung.

II. Wir werden in einem zweiten Abschnitt unseres Kapitels jetzt von der Einteilung der Flächen 2ten Grades in Rücksicht auf die Realitätsunterschiede sprechen. Doch wollen wir uns auf allgemeine Flächen $\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = 0$ (mit nicht verschwindender Determinante D) beschränken. Ausserdem sollen die

Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ reell sein. Wir wollen solche Flächen schlechthin reelle *) Flächen 2ten Grades nennen im Unterschied von den imaginären Flächen zweiten Grades, als welche wir die durch Gleichung: $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ mit komplexen Coefficienten dargestellten Flächen bezeichnen.

Das Eigenartige unserer Betrachtung liegt fernerhin darin, daß wir ein Polartetraeder zu Grunde legen wollen. Man gewinnt ein solches leicht folgendermaßen: Zu einem beliebigen Punkte 1, der jedoch nicht auf der gegebenen Fläche selbst liegen soll, suchen wir in Bezug auf dieselbe die Polarebene I, darauf zu einem Punkte 2 dieser Ebene, welcher wieder der Fläche nicht angehört, die Polarebene II, welche natürlich durch den Punkt 1 geht. Um der Durchschnittskante der Ebenen I und II wählen wir dann einen wieder außerhalb der Fläche gelegenen Punkt 3, dessen Polarebene III infolge dessen durch die Punkte 1 und 2 geht und die Ebenen I und II in einem Punkte 4 schneidet. Die Polarebene IV des Punktes 4 endlich ist durch die Ebene der drei Punkte 1, 2, 3 gegeben.

*) Wir wollen ausdrücklich bemerken, daß hierdurch keineswegs gesagt ist, daß die Flächen überhaupt nur reelle Punkte enthalten.

Die vier Ebenen bilden alsdann ein Polartetraeder, dessen charakteristische Eigenschaft hiernach darin besteht, daß jede Eckfläche Ebene der gegenüberliegenden Ecke ist.

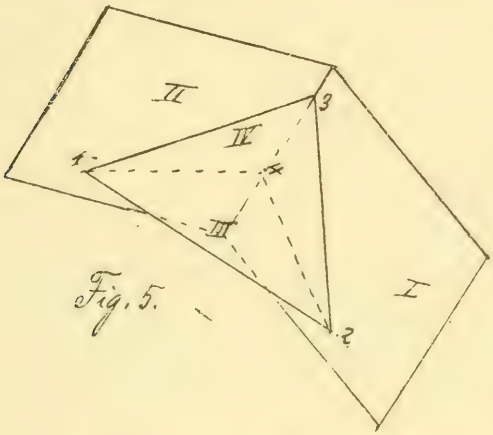


Fig. 5.

Wir wollen einmal abzählen, wie viel willkürliche Constante in unserer Konstruktion eines Polartetraeders enthalten sind. Den Punkt 1 konnten wir ganz beliebig im Raume (mit Ausschluß der Fläche selbst) wählen, dies liefert ∞^3 Möglichkeiten, der Punkt 2 war (mit einer entsprechenden Beschränkung) beliebig auf der Fläche I anzunehmen, was ∞^2fache Auswahl bedingt, endlich war die Ecke 3 auf der Kante (III) in ∞^1fach verschiedener Weise zu wählen möglich. Fassen wir dies zusammen, so folgt:

„Es gibt bei einer gegebenen Fläche 2ten Grades ∞^6 zugehörige Polartetraeder."

Irgend eines dieser Polartetraeder wollen wir nun als Coordinatentetraeder zu Grunde legen. Die Gleichung unserer Fläche nimmt dann (in

analoger Weise wie die Gleichung eines ebenen Kegelschnittes bezogen auf ein Polardreieck) die Form an:

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 = 0 \text{ d. h.}$$

"Auf ein Polartetraeder bezogen enthält die Gleichung einer Fläche 2ten Grades nur reine Quadrate der Variabelen." *)

Wir können sofort noch hinzufügen, indem wir uns erinnern, daß wir nach Voraussetzung mit einer reellen F_2 zu thun haben:

"Sofern wir unsere Polartetraeder reell nehmen, wie wir in der Folge ausdrücklich immer voraussetzen werden, so sind die $k_1\ k_2\ k_3\ k_4$ reelle Größen." Da ferner die Determinante D, die wir als $\neq 0$ voraussetzt haben, gleich:

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \text{ ist, so folgt:}$$

"Von den 4 Größen k wird dabei keine einzige, sondern es sich um eine allgemeine Fläche zweiten Grades handelt, verschwinden."

*) Der Beweis ist analog zu führen, wie bei dem entspr. Falle der Ebene.

Nun ist die Frage, ob wir nicht durch weitere Veränderung des Coordinatensystems die Grössen k wegschaffen können, so dass wir nur eine numerische Gleichung vor uns haben?

Wir setzen $\sqrt{k_1}\, x_1 = z_1$; $\sqrt{k_2}\cdot x_2 = z_2$; $\sqrt{k_3}\cdot x_3 = z_3$; $\sqrt{k_4}\cdot x_4 = z_4$.

Hierdurch erhalten wir die Form:

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$. Doch sind obige Substitutionen nur dann reell, wenn die k positiv waren, anderenfalls dagegen imaginär.

„Zieht man daher gegebenenfalls auch imaginäre Substitutionen in Betracht, so kann man von der oben erhaltenen Gleichungsform sofort zu der für alle Fälle geltenden Gleichung übergehen:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0.$$ "

Da in dieser Gleichung eine specifische Constante nicht mehr vorkommt, so erhalten wir das Resultat:

„Unser letzter Satz zeigt uns, daß irgend 2 allgemeine Flächen zweiten Grades vom allgemeinen algebraischen Standpunkte aus immer durch lineare Substitutionen in einander überführt werden können."

oder prägnanter ausgedrückt:

„Vom algebraischen Standpunkte aus besitzen die allgemeinen Flächen zweiten Grades nur eine Art."

Wollen wir uns jedoch nur auf reelle Substitutionen einlassen, so werden wir bei negativem k die

Substitution $x = \sqrt{k} \cdot x$ zu machen haben. Wir können dies übersichtlich anschreiben wenn wir etwa $k_\alpha = \pm l_\alpha^2$ setzen.

Dann geht unsere ursprüngliche Gleichung (pag. 61) über in:

$$\pm l_1^2 x_1^2 \pm l_2^2 x_2^2 \pm l_3^2 x_3^2 \pm l_4^2 x_4^2 = 0.$$

Nun setzen wir

$$l_1 x_1 = z_1 \; ; \; l_2 x_2 = z_2 \; ; \; l_3 x_3 = z_3 \; ; \; l_4 x_4 = z_4 .$$

Dies ist sicher eine reelle lineare Substitution.

Hierdurch geht unsere Gleichung über in:

$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm z_4^2 = 0$. d.h. in Worten:

„Beschränken wir uns auf reelle lineare Substitutionen so können wir unsere Gleichung: $k x_1^2 + k x_2^2 + k x_3^2 + k x_4^2 = 0$ nur auf eine der verschiedenen Gleichungstypen $\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm z_4^2 = 0$ bringen und dementsprechend je nach Fall, wie nun noch näher auszuführen ist, die allgemeinen Flächen 2ten Grades gegenüber reellen linearen Transformationen in eine bestimmte Anzahl von Unterarten."

Um diese Fälle uns deutlich zu machen, wollen wir die linke Seite unserer Gleichung als solche gesondert betrachten. Es sei also gegeben die

*) Eine einfache Betrachtung der Substitutionen zeigt, daß dieselben das Coordinatentetraeder unverändert lassen und nur den Einheitspunkt reell transformieren.

quadratische Form von 4 Variabeln $\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$ mit der Bedingung $D \geq 0$. (allgemeine quaternäre quadratische Form.). Von einer solchen quadratischen Form ist es bekannt oder auch: es folgt aus den bislang angestellten Betrachtungen, daß man dieselbe jedenfalls (und zwar noch auf ∞^6 Weisen) durch reelle lineare Transformationen in eine der 5 Typen verwandeln kann:

$$
\begin{array}{l}
+z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \,. \\
+z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \,. \\
+z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 \,. \\
+z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 \,. \\
-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 \,.
\end{array}
$$

Nun gilt das sogenannte: „Trägheitsgesetz der quadratischen Formen," das wir hier nur historisch erwähnen wollen, ohne es näher zu begründen.*) Dasselbe besagt, daß es nie möglich ist, einen unserer 5 Typen in einen anderen durch reelle lineare Transformation zu verwandeln.

Dies hat dann die sehr klare Folge, daß hiernach jede gegebene quadratische Form in eine bestimmte der 5 gegebenen Typen hinein [illegible].

Die erste Form nennt man eine [illegible] definite Form, die letzte eine [illegible] Form, und

*) [illegible] übrig [illegible] beiden [illegible] Physik II. [illegible] 1889. [illegible]

zwar deswegen, weil die erste für alle reellen Werte der z stets positiv, die letzte stets negativ ist. Die drei mittleren Typen nennt man indefinite Formen; sie können für reelle Werte der z jede sowohl positiv wie negativ werden.

Wie stellt sich die Sache nun geometrisch dar?

„Weil geometrisch nicht die Formen selbst, sondern nur die Gleichungen in Betracht kommen, welche durch Nullsetzen der Formen entstehen so correspondiren, wie leicht zu sehen, den unterschiedenen 5 Typen der Formen dreierlei Gleichungsformen und damit dreierlei Typen von Flächen 2ter Grades."

Diese wollen wir nun im Einzelnen betrachten:

1.) Es sei:

$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm z_4^2 = 0$, wo entweder das obere oder das untere Zeichen für alle Glieder zugleich zu wählen ist.

Dieser Gleichung genügen keine reellen Werte der z, außer $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$, was hier, wo wir homogene Coordinaten haben, ohne Bedeutung ist. Wir nennen diese Flächen demnach:

nulliteilige Flächen 2ter Grades.

„Dieselben werden also durch eine Gleichung zwischen den Quadraten der z dargestellt, in der alle Vorzeichen übereinstimmen."

2.) Es sei:

$$\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 \mp z_4^2 = 0.$$

Wir wollen diese Flächen als ovale Flächen zweiten Grades bezeichnen.

„Dieselben werden durch eine rein quadratische Gleichung der z dargestellt, bei welcher ein Vorzeichen von den 3 übrigen abweicht."

3.) Es sei:

$$\pm z_1^2 \pm z_2^2 - z_3^2 \mp z_4^2 = 0$$

Es sind dies die eingeräumigen Flächen zweiten Grades.

„Dieselben liegen vor, wenn die + und die − Zeichen in der Gleichung zwischen den z^2 gleich oft auftreten."

Wenn wir diese Einteilung nun mit jener der gewöhnlichen analytischen Geometrie vergleichen wollen, dann müssen wir uns vor Augen halten, daß für die letztere neben den allgemeinen projektiven Eigenschaften besonders auch die Beziehung der unendlich fernen Ebene zu der Fläche zweiten Grades maßgebend ist. Wir wollen daraufhin einmal unsere 3 Fälle einzeln betrachten, indem wir zugleich statt der homogenen Variabelen gewöhnliche anwenden ($z_4 = 1$ gesetzt.)

1.) Im ersten Falle haben wir:

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -1$. Dieser Gleichung kann nicht durch reelle Werte der z genügt werden, daher nennt die gewöhnliche Geometrie die durch sie dargestellte

Fläche eine „imaginäre Fläche 2ten Grades," eine Bezeichnung, welche in unserem Zusammenhange nicht annehmbar ist, da wir dieselbe bereits in anderer Weise verwandt haben. *) Eine weitere Unterscheidung je nach der Beziehung zur ∞^1 fernen Ebene tritt hier noch nicht ein.

2.) Was nun die zweite Gleichungsform betrifft, so haben wir folgende drei Flächentypen der gewöhnlichen Geometrie zu nennen, die hierher gehören: (Wir geben ihre Gleichungen in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten an:)

a.) das Ellipsoid: **)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

b.) das zweischalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad \text{und}$$

c.) das elliptische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$$

---

*) Wir nennen eben „eine imaginäre F_2" eine solche, deren Gleichung $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ imaginäre Coefficienten enthält.

**) Bei den Fällen a und b tritt die Zugehörigkeit zu der zweiten Gleichungsform sofort hervor, da diese Flächen ja bereits auf ein Polartetraeder bezogen sind, was bei c nicht der Fall.

Die nähere Definition dieser Eigenschaft ist diese:

„Die ovalen Flächen zweiten Grades [illegible] über der ∞ fernen Ebene in drei Arten; entweder die Ebene trifft überhaupt nicht die Fläche zweiten Grades, dann haben wir das Ellipsoid, oder sie schneidet die Fläche zweiten Grades, dann haben wir das zweischalige Hyperboloid, oder endlich sie berührt die Fläche, dann haben wir das elliptische Paraboloid."

3.) Zu dem dritten Gleichungstypus gehören:

a.) das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{und}$$

b.) das hyperbolische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 0. \text{ d. i.}$$

„Die ringförmigen Flächen liefern je nach ihrer Stellung zur ∞ fernen Ebene, welche sie entweder in einem [illegible] oder in einem zerfallenden Kegelschnitte schneiden ist berühren, einschalige Hyperboloide beziehungsweise hyperbolische Paraboloide."

Wir erkennen jetzt leicht den charakteristischen Unterschied der ovalen und der ringförmigen Flächen zweiten Grades. Auf letzteren laufen die bekannt, im Gegensatze zu den ersteren 2 Scharen reeller Geraden, und in Rücksicht hierauf nennt die [illegible] liche Geometrie die Flächen zweiter Ord., welche nicht

geradlinige Flächen," die dritter Art dagegen „reelle geradlinige Flächen." Doch sind diese Benennungen von unserem Standpunkte aus hier nicht beizubehalten. Denn einmal können wir die Bezeichnung „reelle Fläche" nicht gebrauchen aus demselben Grunde, um deß willen wir bei den Flächen zweiter Art die Bezeichnung „imaginäre Fläche" nicht annehmen konnten; dann aber auch ist der Ausdruck „geradlinig resp. nicht geradlinig" für den hier von uns eingenommenen Standpunkt nicht bezeichnend, weil auf den Flächen 2. Art ebensogut wie auf denen dritter Art gerade Linien liegen, nur sind dieselben dort imaginär. Diese Scheidung in geradlinige und nicht geradlinige Flächen geht daher um so weniger an, als wir eben nun darauf ausgehen wollen in einem dritten Teile unserer Betrachtung der F_2 auf allen unseren Flächen bald reelle bald imaginäre gerade Linien nachzuweisen.

III. Von den geraden Linien auf den reellen Flächen.

Es ist jedenfalls zweckmäßig, mit dem ringförmigen Typus zu beginnen. Wir gehen aus von der Gleichung:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, welche wir umformen in:

$(x_1^2 - x_3^2) + (x_2^2 - x_4^2) = 0$

oder:

$(x_1 + x_3)(x_1 - x_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0$. Wir führen nun ein neues Coordinatensystem ein durch die einfachen Substitutionen:

$$x_1 + x_3 = y_1 \quad ; \quad x_2 + x_4 = y_2 \; ;$$
$$x_1 - x_3 = y_3 \quad ; \quad x_2 - x_4 = y_4 \; .$$

Dann lautet unsere Gleichung:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Diese Gleichungsform legen wir der weiteren Untersuchung zu Grunde.

Es befriedigt offenbar unsere Gleichung:

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$, d. h. die Kante, die die Eckpunkte 3 und 4 unseres Coordinatentetraeders verbindet. Ebenso folgt aus den Gleichungspaaren:

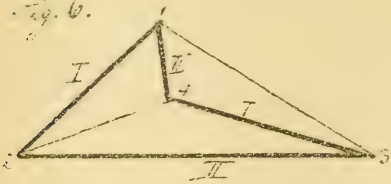
$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$, vermöge deren unsere Gleichung auch jedesmal befriedigt ist, daß auch entsp. die Kanten:

(23), (14), (12) in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche liegen.

" Unser Tetraeder gehört daher mit 4 seiner Kanten,

die ein windschiefes Viereck bilden, der Fläche zweiten Grades an." und wie ganz klar ist, 2 der Kanten gehören den Erzeugenden der einen Art, 2 der Kanten den Erzeugenden der anderen Art an, da sich ja die Erzeugenden derselben Art nie schneiden. (Wir haben dementsprechend den Kanten der Figur eine I, bez. II beigesetzt.).

Fig. 6.



Wir behaupten nun, daß die beiden noch freien Kanten [$\overline{24}$ und $\overline{13}$] konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche sind. Wie ist dies zu zeigen?

Offenbar sind sämmtliche 4 Ebenen unseres Tetraeders Tangentialebenen unserer Fläche, da jede 2 Erzeugenden derselben enthält. Da nun für eine solche Tangentialebene der Kreuzungspunkt der beiden in ihr liegenden Erzeugenden der Berührungspunkt und damit der Pol in Bezug auf die Fläche ist, so gilt:

„Die Pole (d.h. die Berührungspunkte) der 4 Ebenen unseres Tetraeders fallen bzw. in die 4 Ecken des Tetraeders hinein.

In der That enthält daher beispielsweise 13 die Pole der beiden Ebenen, welche sich längs der Kante $\overline{24}$ schneiden und umgekehrt."

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die Kanten $\overline{13}$ und $\overline{24}$ „konjugierte Polaren" sind.

Wir nennen nun ein Coordinatentetraeder mit den erwähnten Beziehungen ein „Tangentialtetraeder". Es entspricht dasselbe dem Tangentialdreieck in Bezug auf ebene Kegelschnitte. (vgl. die Wintervorlesung.)

Fragen wir uns des ferneren einmal, wie oft wir ein solches Tetraeder bei einer gegebenen Fläche wählen können. Offenbar so oft, wie wir auf dem einschaligen Hyperboloid oder hyperbolischen Paraboloid ein windschiefes Viereck, das unser Tetraeder bedingt, annehmen können. Hieraus folgt sofort:

„Bei gegebenen Flächen zweiten Grades gibt es ∞^4 Tangentialtetraeder, insofern ich die 2 mal 2 beliebig zu wählenden Erzeugenden, die als Kanten des Tetraeders in Betracht kommen, unter den einfach unendlich vielen Erzeugenden ihrer Art jedesmal auf je ∞^2 fach verschiedene Weise herausgreifen kann."

Fragen wir uns aber, wie oft wir die Fläche 2ten Grades in der Form $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ darstellen können, so wird die Antwort etwas anders lauten.

Schreiben wir einmal:

$$(\lambda y_1)\left(\frac{y_3}{\lambda}\right) + (\mu y_2)\left(\frac{y_4}{\mu}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$y_1' \cdot y_3' + y_2' \cdot y_4' = 0$, so haben wir wieder die frühere Gleichungsform bei denselben Coordinatentetraeder und zwar hängen die neuen

Variabeln mit den alten durch die Gleichungen zusammen:

$$y_1' = \lambda y_1 \quad ; \quad y_2' = \lambda y_2 \cdot$$
$$y_3' = \frac{y_3}{\lambda} \quad ; \quad y_4' = \frac{y_4}{\lambda} \cdot \quad \text{d. h.}$$

„ In jedem Tangentialtetraeder lassen sich die Coordinaten $y_1 y_2 y_3 y_4$ noch auf 2 fach unendlich viele Weise so definieren, daß die Gleichung $y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0$ herauskommt, *) daher sich denn die Gleichung Alles in Allem genommen auf $\infty 6$ Weisen herstellen läßt."

Dies beiläufig. Wir wollen uns jetzt fragen, wie wir am einfachsten die geraden Linien auf der Fläche darstellen können. Unsere Gleichung wird offenbar befriedigt, wenn wir setzen:

$$y_1 = \lambda y_4 \cdot \quad ; \quad \lambda y_3 = -y_2 \cdot$$

Bei einem festen Wert von λ stellt die erste Gleichung eine Ebene dar, die durch die Kante $\overline{23}$ hindurchgeht, ebenso die zweite Gleichung eine Ebene, die durch die Kante $\overline{14}$ hindurchgeht. Beide schneiden sich daher in einer Linie, die sowohl die Kante $\overline{23}$ wie $\overline{14}$ trifft. Da nun λ ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

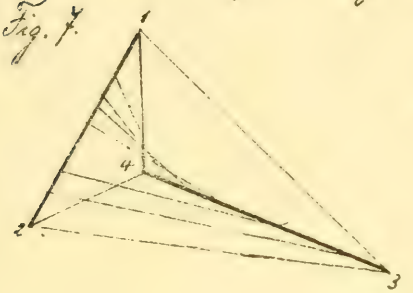
---

*) Es liegt dies wieder an der speziellen Wahl des „Einheitspunktes"

Unsere Fläche 2ten Grades trägt eine erste Schaar gerader Linien, welche sich auf die Kanten $\bar{23}$ und $\bar{14}$ stützen und unter λ einen Parameter verstanden durch folgende Gleichungspaare dargestellt sind:

$$y_1 = \lambda y_4 .$$
$$\lambda y_3 = - y_2 .$$

Fig. 7.



Unsere Gleichung $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ wird aber auch befriedigt durch das Gleichungspaar:

$$y_1 = \mu y_2$$
$$\mu y_3 = - y_4 .$$

Unsere Fläche trägt daher noch eine zweite Schaar von geraden Linien, welche sich auf die Kanten $\bar{12}$ und $\bar{34}$ stützen und unter μ einen Parameter verstanden durch die Gleichungen:

$$y_1 = \mu y_2$$
$$\mu y_3 = - y_4 .$$ dargestellt sind.

Diesen beiden Schaaren gehören in der That diejenigen Kanten unseres Tetraeders an, die wir vorhin mit I bez. II bezeichneten.

Hier tritt nun gleich hervor, welche Stellung die Flächen zweiten Grades in der synthetischen

Geometrie einnehmen.

Es stellt offenbar:

$$y_1 = \mu y_2 \quad \text{und ebenso}$$
$$\mu y_3 = -y_4$$

bei variablem μ ein Ebenenbüschel dar, diese beiden Ebenenbüschel sind aber projektiv zu einander, wenn wir die gleichen Werten μ entsprechenden Ebenen einander zuordnen. Der Schnitt, den je zwei solche Ebenen gemein haben, ist eine gerade Linie, die wie bereits gesagt, ganz der vorliegenden Fläche 2ten Grades angehört. v. Staudt bezeichnet nun die beiden Schaaren der geraden Linien, die auf diese Weise entstehen, als Regelschaaren.

Wir haben daher das Resultat, welches die Stellung der ringförmigen Flächen zweiten Grades im System der synthetischen Geometrie definiert:

„Unsere ringförmige Fläche 2ten Grades ist Trägerin zweier Regelschaaren, und jede dieser Regelschaaren erscheint als der geometrische Ort der Schnittlinien zweier projektiven Ebenenbüschel."

[Vgl. das Kapitel der Wintervorlesung: „Die projektive Erzeugung der ebenen Gebilde zweiten Grades."]

Wir werden uns nun aber in der synthetischen Geometrie nicht auf reelle projektive Ebenenbüschel

zu beschränken brauchen.

„Wenn daher hiernach in der synthetischen Geometrie die ringförmigen Flächen zweiten Grades vermöge der genannten Erzeugungsweise vor allen anderen bevorzugt erscheinen, so bedarf es nur einer Erledigung der reellen Elemente durch komplexe Elemente, um in entsprechender Weise alle beliebigen Flächen 2ten Grades zu erzeugen." —

Jetzt wollen wir geradezu die Linienkoordinaten unserer geraden Linien berechnen.

Die einzelne Erzeugende der zweiten Schaar z. B. ist der Schnitt der beiden Ebenen:

$$\begin{cases} y_1 - \mu y_2 = 0. \\ \mu y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

Wir haben nun einfach die Matrix der Coefficienten zu bilden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \end{vmatrix}$$ und aus ihr die Unterdeterminanten.

Diese geben uns sofort die Linienkoordinaten q der Erzeugenden der zweiten Schaar als:

$$q_{12} = 0; \quad q_{13} = \mu; \quad q_{14} = 1.$$

$$q_{34} = 0; \quad q_{42} = \mu; \quad q_{23} = -\mu^2.$$

Nun fragen wir uns: Wenn μ imaginär wird,

was haben diese Linien dann für eine Eigenschaft, sind sie nieder imaginär oder hoch imaginär und, wenn letzteres der Fall ist, sind sie rechts gewundene oder links gewundene?

Wir setzen also:

$\omega = a + bi$, wo $b \gtrless 0$, und spalten die Linien-coordinaten in $r+is$. Dann ist:

$$r_{12} = 0;\ r_{13} = a;\ r_{14} = 1.$$
$$r_{34} = 0;\ r_{42} = a;\ r_{23} = -a^2 + b^2.$$

$$s_{12} = 0;\ s_{13} = b;\ s_{14} = 0$$
$$s_{34} = 0;\ s_{42} = b;\ s_{23} = -2ab.$$

Nun bilden wir uns die Ausdrücke: (r,r) und (s,s).

Wir finden:

$$(r,r) = (s,s) = +b^2 > 0.$$

Dies besagt nach unseren früheren Auseinandersetzungen:

„Diejenigen Linien der zweiten Erzeugung, welche imaginär sind, sind hiernach hoch imaginär und zwar links gewunden."

„Entsprechend sind dann die imaginären Linien der ersten Erzeugung unserer Fläche ebenfalls hoch imaginär und rechts gewunden."*)

*) Diese Sätze stimmen damit überein, daß die auf einander folgenden Paaren Linien der einen Art oder der anderen Art gegen einander in dem einen, bez. dem anderen Sinne gewunden sind (d. i. von der ersten Art rechts herum, die der zweiten Art links herum.)

„Hiernach tragen also die ringförmigen Flächen zweiten Grades neben den reellen Erzeugenden nur noch imaginäre gerade Linien."

In der That, da durch jeden reellen Punkt der F_2 zwei reelle Gerade hindurchlaufen, wie könnten auf der F_2 imaginäre Gerade mit reellem Punkte existieren?

Wir werden jetzt weiter die beiden Schaaren der geraden Linien auf den ovalen und den nulteiligen Flächen zweiten Grades nachzuweisen haben.

Wir beginnen mit den nulteiligen Flächen. Hier können wir sogleich 2 Sätze behaupten. Da die nulteilige Fläche ja keinen reellen Punkt besitzt, so werden weder reelle noch nieder imaginäre gerade Linien auf derselben liegen, d.h. positiv ausgedrückt:

„Alle geraden Linien der nulteiligen Fläche sind hochimaginäre."

Hieran knüpft sich weiter der Satz, dass eine Schaar der Erzeugenden aus rechts gewundenen, die andere aus links gewundenen hoch imaginären Linien besteht. Denn da die Erzeugenden derselben Schaar doch eine continuierliche Mannigfaltigkeit bilden, so wird es nicht angehen, dass Linien derselben Schaar zum Teil einem rechtsgewundenen, zum Teil einem links gewundenen Sinn zeigen, es müßten denn

Linien vorhanden sein, welche den Uebergang bilden, d.h. nieder imaginäre Geraden. Andererseits aber können die Erzeugenden der beiden Schaaren nicht beide gleich rechts gewunden oder beide links gewunden sein. Wir würden sonst zwei Arten von nulteiligen Flächen zu unterscheiden haben, je nach dem Sinn ihrer geradlinigen Erzeugenden, während doch unsere Flächen reellen Projektivitäten gegenüber durchaus ohne Unterschied sind.

Die sind allgemeine Gründe, deren Richtigkeit man nicht gut bezweifeln kann, doch wird man gern eine analytische Verification wünschen. Vorerst wollen wir noch einen anderen Punkt anführen:

Da 2 konjugiert imaginäre Linien der hier in Betracht kommenden Art immer gleichzeitig entweder links oder rechts gewunden sind, so ergiebt sich sofort der Satz:

<u>"Jede der beiden Schaaren von Erzeugenden ist sich selbst konjugiert imaginär."</u>

Wir gehen nun zur analytischen Verification der vorhin ausgesprochenen Sätze über:

Die Gleichung der nulteiligen Fläche war auf die Gestalt gebracht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \qquad \text{oder:}$$

$(x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + ix_4)(x_2 - ix_4) = 0$, wofür wir schreiben:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0 .$$

Hierdurch haben wir ein Tangentialtetraeder als Coordinatentetraeder zu Grunde gelegt, allerdings hat dasselbe imaginäre Ebenen und Ecken. Reell ist nur die Kante, längs der sich die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ schneiden und die gegenüberliegende Kante, längs welcher sich die Ebenen $y_2 = 0$, $y_4 = 0$ schneiden, so daß wir auch sagen können:

„Reell sind von dem Tangentialtetraeder nur die beiden Kanten, welche konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche 2ten Grades sind."

Das Auftreten imaginärer Elemente in dem Tangentialtetraeder hindert jedoch durchaus nicht, die beiden Scharen der geraden Linien in derselben Weise wie in voriger Vorlesung zu bilden als:

Erste Art: $\begin{cases} y_1 = \lambda y_4 . \\ \lambda y_3 = - y_2 . \end{cases}$ Zweite Art: $\begin{cases} y_1 = \mu y_2 . \\ \mu y_3 = - y_4 . \end{cases}$

Da y_1 und y_4 bereits imaginär sind, so hat es keinen Zweck, sich auch nur vorübergehend auf reelle Werte von λ und μ zu beschränken, wir setzen vielmehr gleich:

$$\lambda = a + i b$$

$$\mu = c + i d .$$ und gehen anschließend zu dem Coordinatensystem der x zurück. Wir erhalten alsdann für die Erzeugenden der ersten Art

die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a+ib)(x_2 - ix_4) \\ (a+ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4 \end{cases}$$

oder geordnet:

$$\begin{cases} x_1 - (a+ib)x_2 + ix_3 + i(a+ib)x_4 = 0 \\ (a+ib)x_1 + x_2 - i(a+ib)x_3 + ix_4 = 0 \end{cases}$$

Hiernach werden wir die Coordinaten jener unserer geraden Linien bekommen, wenn wir die Determinanten der folgenden Matrix aus den Coefficienten bilden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a+ib) & i & i(a+bi) \\ a+bi & 1 & -i(a+ib) & i \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$p_{12} = 1 + (a^2 - b^2) + 2iab. \quad p_{13} = +2b - 2ai.$$
$$p_{34} = -1 - a^2 + b^2 - 2iab. \quad p_{42} = -2b + 2ai.$$
$$p_{14} = 2ab + i(1 - a^2 + b^2).$$
$$p_{23} = -2ab - i(1 - a^2 + b^2).$$

oder, wenn wir die Coordinaten in ihren reellen und imaginären Bestandteil spalten:

$$r_{12} = 1 + a^2 - b^2. \quad r_{13} = 2b. \quad r_{14} = 2ab.$$
$$r_{34} = -(1 + a^2 - b^2). \quad r_{42} = -2b. \quad r_{23} = -2ab.$$

und:

$$s_{12} = 2ab. \quad s_{13} = -2a. \quad s_{14} = 1 - a^2 + b^2.$$
$$s_{34} = -2ab. \quad s_{42} = +2a. \quad s_{23} = -(1 - a^2 + b^2).$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wie es ja

auch sein muß,

$(r, r) = (s, s)$ ist und zwar wird:

$(r, r) = (s, s) = -1 - 2a^2 - 2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4$.

Da der Ausdruck links nun stets negativ ist, so können wir die Richtigkeit unserer auf pag. 2 angeführten Sätze für die Ergänzenden der zweiten Art.

Führen wir die Entwickelung analog für die Ergänzenden zweiter Art durch, so werden wir für diese finden:

$(r, r) = (s, s) = 1 + 2c^2 + 2d^2 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4$, wo dann der Ausdruck links stets positiv ist.

Wir haben daher den Satz:

„ Die Ergänzenden der zweiten Art sind rechts zu den, die Ergänzenden der zweiten Art sind links genommen. (gemäß unserer Verabredung über die Reihenfolge der Coordinaten.)"

Wir wollen nun unsere Formeln benutzen, um eine neue Frage aufzuwerfen.

Es seien durch:

$\lambda = a + ib$

$\lambda' = a' + ib'$ die Parameter bezeichnet, die zu zwei konjugiert imaginären Ergänzenden gehören.

Es ist die Frage, wie hängen λ und λ' zusammen?

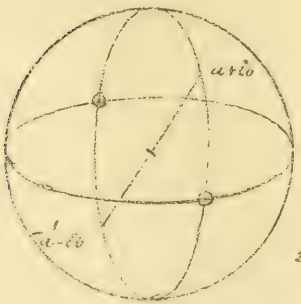
Eine ähnliche Frage haben wir im vorigen Kapitel

Bei der Betrachtung der Kegelschnitte bemerkt.

Wir hatten daselbst geschieden zwischen eineiligen und mehreiligen Kegelschnitten und in Betreff derselben folgenden Satz aufgestellt:

„Konjugiert imaginäre Punkte eines eineiligen Kegelschnittes bekommen konjugiert imaginäre Parameterwerte λ. Konjugiert imaginäre Punkte eines mehreiligen Kegelschnittes bekommen diametral imaginäre Parameterwerte λ". [v. Wintervorlesung.]. Unter diametral imaginären Werten λλ' hatten wir dabei folgendes verstanden. Wenn wir die Größe $a+ib$ in gewöhnlicher Weise auf der Kugel deuten, dann gehört zu dem Punkte $a+ib$ ein diametral gegenüberliegender Punkt.

Fig 8.



Ist $a+ib=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist dieser zweite Punkt

$=-\frac{1}{\varrho}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

oder, wenn wir Zähler und Nenner mit $\cos\varphi-i\sin\varphi$ multiplizieren:

$$=\frac{-1}{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{-1}{a-ib}.$$

„Diesen Wert $\frac{-1}{a-ib}$ bezeichnen wir dementsprechend als diametrale Größe zu $a+ib$"

Wir machen die Analogie des Satzes über die Kegelschnitte

mit der uns vorliegenden Frage betreffs der konjugiert imaginären Erzeugenden jetzt leicht erkennen. Es gelten ja, wie gezeigt, z. B. bei den Erzeugenden der ersten Art die Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a+ib)(x_2 - ix_4). \\ (a+ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4. \end{cases}$$

Setzen wir nun die konjugiert imaginären Geraden zu erhalten, hierin für i überall $-i$:

$$\begin{cases} x_1 - ix_3 = (a-ib)(x_2 + ix_4). \\ (a-ib)(x_1 + ix_3) = -x_2 + ix_4. \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = \dfrac{-1}{a-ib} \cdot (x_2 - ix_4). \\ \dfrac{-1}{a-ib} \cdot (x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4. \end{cases}$$

Wir erkennen, daß diese Gleichungen der konjugiert imaginären Geraden gleichfalls den ersten Typus tragen, nur ist statt $a+ib$ die diametrale Größe $\dfrac{-1}{a-ib}$ gesetzt. Dies besagt:

„Auf der zweiteiligen Fläche haben konjugiert imaginäre Erzeugende diametrale Parameter."

Dagegen haben, wie wir ergänzend bemerken können, auf den ringförmigen Flächen konjugiert imaginäre Erzeugende konjugierte Parameter.

Wir gehen jetzt zu den <u>realen Flächen 2ten Grades</u> über, welche die Gleichungsform haben: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, mag man sich hierunter eine Kugel, ein Ellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid denken.

Reelle Erzeugende werden auch hier nicht auftreten können, da wir jedoch ∞^2 reelle Punkte auf einer solchen Fläche haben, so werden wir <u>∞^2 nieder imaginäre Erzeugende</u> bekommen, und zwar werden je zwei konjugirt imaginäre Erzeugende dieser Art denselben reellen Punkt der Fläche zugewiesen und sich also auf die beiden Schaaren von Erzeugenden vertheilen. Wir behaupten noch mehr:

<u>„Mit diesen so gefundenen nieder imaginären Geraden haben wir die sämmtlichen Erzeugenden der realen Flächen 2ten Grades erschöpft. Es giebt bei ihnen keine hochimaginären Geraden."</u>

Dies wäre wieder in gewohnter Weise analytisch nachzuweisen:

Wir schreiben die Gleichung der Fläche:

$$x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0. \text{ oder}$$

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

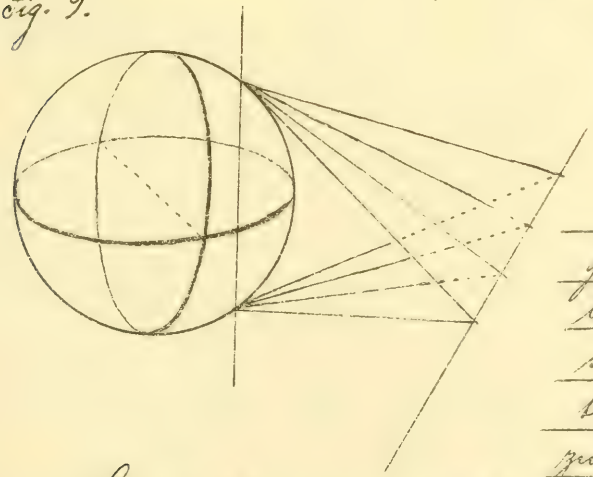
In dem so zu Grunde gelegten Tangentialtetraeder findet sich zunächst die reelle Kante $x_1 = 0, x_3 = 0$ als Schnitt der Ebenen $y_1 = 0, y_3 = 0$. Ferner ist die

gegenüberliegende Kante der Schnitt zweier reeller Seitenebenen: $y_2 = 0$, $y_4 = 0$ oder $x_2 \pm x_4 = 0$: Hieraus folgt, daß auch die beiden Eckpunkte, in welchen die erste Kante diese Ebenen durchsetzt reell sind.

Unser Tetraeder hat daher wieder 2 reelle Kanten, welche konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche sind. Die eine schneidet die Fläche in 2 reellen Punkten, von der anderen gehen an die Fläche 2 reelle Tangentialebenen."

Hieraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion für ein solches Tangentialtetraeder bei einer vorgelegten Fläche, als welche wir in der Figur der Einfachheit wegen eine Kugel wählen wollen:

Fig. 9.



„Wir erhalten dasselbe, indem wir irgend zwei reelle Punkte der Fläche durch eine gerade Linie verbinden, und andererseits deren Tangentialebenen in einer zweiten geraden Linie zum Schnitt bringen, endlich das windschiefe Viereck

der imaginären Geraden hinzufügen, welche auf der Fläche von den beiden reellen Punkten aus-laufen oder in den beiden reellen Ebenen liegen."

Wir wollen jetzt zur Darstellung der geraden Linien auf den ovalen Flächen schreiten.

Die Erzeugenden erster Art sind gegeben durch:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda y_4 \\ \lambda y_3 = -y_2 \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a+ib)(x_2 - x_4). \\ (a+ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - x_4. \end{cases}$$

oder geordnet:

$$\begin{cases} x_1 - (a+ib)x_2 + ix_3 + (a+ib)x_4 = 0. \\ (a+ib)x_1 + x_2 - i(a+ib)x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$ so daß die Coefficienten-Matrix für die Bestimmung der $q_{\alpha\beta}$ die Gestalt hat:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a+ib) & i & +(a+ib) \\ a+ib & 1 & -i(a+ib) & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich:

$q_{12} = 1 + a^2 - b^2 + 2abi$. $q_{13} = 2b - 2ai$. $q_{14} = 1 - a^2 + b^2 - 2abi$;

$q_{34} = i(1 + a^2 - b^2) - 2ab$. $q_{42} = 2a + 2bi$. $q_{23} = -2ab + i(-1 + a^2 - b^2)$.

Spalten wir die $q_{\alpha\beta}$ wieder in den reellen und imaginären Teil, so kommt:

$r_{12} = 1 + a^2 - b^2$. $r_{13} = 2b$. $r_{14} = 1 - a^2 + b^2$;

$r_{34} = -2ab$. $r_{42} = 2a$. $r_{23} = -2ab$.

woraus folgt:

$$(r, r) = -2ab - 2a^3b + 2ab^3 + 4ab + 2a^3b - 2ab^3 - 2ab = 0. \quad \text{d. h.}$$

„Alle geraden Linien sind niederimaginär."

Die konjugiert imaginäre Gerade zu der betrachteten wird des weiteren gegeben durch

$$\begin{cases} x_1 - ix_3 = (a - ib)(x_2 - x_4). \\ (a - ib)(x_1 + ix_3) = -x_2 - x_4. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen auch in der Form geschrieben werden können:

$$x + ix_3 = -\frac{1}{a - ib}(x_2 + x_4). \qquad \text{d. h.} \quad y_1 = \mu \cdot y_2.$$
$$\frac{-1}{a - ib} \cdot (x_1 - ix_3) = -(x_2 - x_4) \qquad \mu \cdot y_3 = -y_4.$$

so ergiebt sich der Satz:

„Die konjugiert imaginäre Linie einer Erzeugenden der einen Art gehört der anderen Art an und wird für den diametralen Parameterwert erhalten."

Ein besonderes Interesse bieten nun diese Sätze wegen ihrer Beziehung zur Funktionentheorie.

Wir sind gewohnt, die komplexe Größe $a + ib$ auf der Kugel zu deuten, indem wir jedem Punkte derselben einen Wert $a + ib$ zuordnen und umgekehrt.

Wir behaupten jedoch weiter:

Wenn man in der Funktionentheorie den reellen

Punkten einer Kugel komplexe Werte $a+ib$ beilegt, so sind dies gerade die Parameterwerte, welche die auf der Kugel verlaufenden Tangenten der einen Art, deren jede ja einem reellen Punkte eindeutig zugeordnet ist, im Sinne der hier vorliegenden Entwickelungen unter Zugrundelegung eines geeigneten Tangentialtetraeders besitzen.

Dies ergiebt sich sofort, wenn wir die Gleichung der Kugel: $x_2 + y_2 + z^2 - 1 = 0$, indem wir zu einem Tangentialtetraeders übergehen, schreiben als:

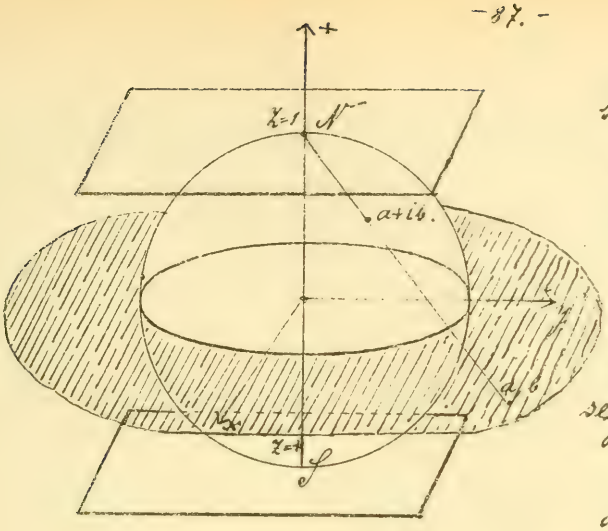
$$(x+iy)(x-iy) - (1+z)(1-z) = 0$$

Wir erkennen leicht: Der oberste und der unterste Punkt der Kugel, der Nord- und Süd-Pol, sind die beiden reellen Ecken, die Tangentialebenen in diesen Punkten die reellen Seitenflächen des Tangentialtetraeders, der Schnitt der letzteren, d.h. die ∞ weite Gerade der Aequatorebene ist die zweite reelle Kante des Tetraeders.

Wir projicieren nun bekanntlich vom Punkte $z=1$ aus die Punkte der Aequatorebene mit den Coordinaten a, b auf die Kugel und geben den Bildpunkten alsdann die Bezeichnung $a+ib$. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten des Bildpunktes mit x, y, z, so wird:

$$x : y : 1-z = a : b : 1, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$a+ib = \frac{x+iy}{1-z}.$$



Diese Formel giebt also an, wie sich das $a+ib$ des Kugelpunktes aus dessen rechtwinkligen Coordinaten zusammensetzt.

Wie aber setzt sich der Parameter $a+ib$ für die geradlinigen Erzeugenden der einen Art aus den Coordinaten der zugehörigen Kugelpunkte zusammen?

Die Erzeugenden der ersten Art sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{cases} x+iy = \lambda(1-z), \\ \lambda\cdot(x-iy) = 1+z, \end{cases}$$

aus deren erster folgt:

$$\lambda = \frac{x+iy}{1-z}.$$

Dies ist aber genau die obige Formel für $a+ib$. Hiermit ist die in Aussicht gestellte Uebereinstimmung erwiesen.

Diese Uebereinstimmung unserer projektiven Betrachtungen mit dem geometrischen Ansatz der Funktionentheorie ist offenbar mehr als eine zufällige. Wir haben als tieferen Grund dafür, dass man (in der Funktionentheorie) $a+ib$ so schön auf der Kugel interpretieren kann, diesen anzusehen, dass die Punkte der Kugel eindeutig bezogen werden können auf

die Curven einer rationalen Curvenschaar, nämlich der Schaar der erzeugenden Geraden, deren Individuen sich durch einen Wert des Parameters festlegen lassen. Andererseits sehen wir, daß wir eine Interpretation von $a+ib$ auf der Kugel noch auf ∞ viele andere Weise einführen können als es gewöhnlich geschieht, indem wir nicht von dem rechtwinkligen Coordinatensystem $x\,y\,z$, sondern von irgend einem Polartetraeder ausgehen, das zur Kugel gehört."

„Ueberdies können wir endlich sogar statt der Kugel zur Deutung von $a+ib$ ebenso gut irgend eine andere ovale Fläche zweiten Grades zu Grunde legen."

In diesen Sätzen liegt die funktionentheoretische Bedeutung begründet, welche unsere Betrachtungen über Nicht-Euklidische Geometrie (Cayley's Maassbestimmung) später gewinnen sollen.

„Wir wollen jetzt nur noch eine Bemerkung über die Einführung von $a+ib$ in der Ebene machen. Auch diese können wir so deuten, daß sie mit unserem bisherigen Gedankengang übereinstimmt."

Durch jeden Punkt in der Ebene geht doch ein ganzes Büschel von geraden Linien hindurch, mag der Punkt selbst reell oder imaginär sein.

Wir setzen denselben jetzt imaginär voraus, und schreiben das Büschel:

$p + \lambda \cdot q = 0$, wo $\lambda = a + ib$ ist.

Für jeden Wert von λ erhalten wir dann im allgemeinen eine imaginäre gerade Linie, welche als solche nur einen reellen Punkt trägt.

Es giebt hierbei nur einen Ausnahmefall, unter den Geraden $p + \lambda q = 0$ giebt es eine reelle Linie, nämlich die Linie, welche den imaginären Punkt mit seinem conjugiert imaginären verbindet. Wir können annehmen, daß diese reelle Gerade durch $q = 0$ gegeben werde, ihr entspricht daher der Wert $\lambda = \infty$.

Offenbar haben wir so die Möglichkeit, in der Ebene eine Deutung von $a + ib$ zu konstruieren, der Art, daß wir alle geraden Linien $p + \lambda q = 0$ eines Büschels zu Grunde legen, welches von einem imaginären Punkt ausstrahlt, und nun jedem reellen Punkte der Ebene das λ derjenigen Büschelgeraden zuordnen, die durch ihn hindurchgeht. Dann wird auch jedem λ nur ein Punkt der Ebene hinzugehören, bis auf den einen ausgezeichneten Wert von λ, sagen wir $\lambda = \infty$, welcher der geraden Linie zugehört, die den imaginären Mittelpunkt des Büschels mit dem konjugiert imaginären Punkte verbindet. Diesem Werte von λ gehören alle reellen Punkte der genannten Linie an."

Wir behaupten nun, daß diese Deutung der imaginären Worte $a + ib$ in der Ebene die gewöhnliche Deutung des $a + ib$ einschließt, und zwar:

„ergiebt sich die gewöhnliche Darstellung von $a + ib$ in der Ebene, wenn wir als imaginären Büschelmittelpunkt den einen Kreispunkt zu Grunde legen, wobei die reelle Verbindungslinie mit dem konjugiert imaginären Punkte die unendlich weite Gerade der Ebene wird."

Um dies zu beweisen, stellen wir die Gleichung des Büschels, das den einen Kreispunkt als Träger hat, wirklich auf: $x + iy = \lambda$. (oder homogen geschrieben $x + iy = \lambda t$.) Wir fragen uns nun, welches ist der reelle Punkt, welcher für $\lambda = a + bi$ auf der Büschelgeraden $x + iy = a + bi$ liegt. Offenbar wird derselbe gegeben durch $x = a$, $y = b$.

Dieser Punkt bekommt alsdann die Marke $a + bi$, und wir erkennen hierin sofort die elementare Regel. Wenn aber $\lambda = \infty$ wird, so wird $x + iy = \infty$, d. h. $t = 0$. Dies ist der Ausnahmefall, welcher hier die ∞ weite Gerade ergiebt. Jedem unendlich weiten Punkte der Ebene erteilen wir also die Marke $\lambda = \infty$; dies ist dasselbe, was man wohl mit den Worten ausspricht:

„In der Funktionentheorie hat die Ebene nicht eine ∞ weite Gerade, sondern nur einen unendlich weiten Punkt $\lambda = \infty$."

Man erkennt, worauf diese Betrachtungen abzielen:

„Es wird überhaupt eine Aufgabe dieser Vorlesung sein, die geometrischen Konstruktionen und Sätze, welche man sonst in der Funktionentheorie auf elementare Weise begründet, auf die Grundsätze der projektiven Geometrie zu stützen, womit von selbst sich eine größere Geschmeidigkeit und Allgemeinheit dieser Konstruktionen und Sätze ergeben wird."

Wir wollen jetzt in einem vierten Kapitel von den Collineationen des Raumes reden.

Wir stellen uns zuvörderst wieder auf den allgemeinen algebraischen Standpunkt. Wir sagen alsdann: zwei Räume sind collinear, wenn zwischen ihren Punktcoordinaten die Beziehungen bestehen:

$$\varrho\, y_\varkappa = \sum_\beta c_{\varkappa\beta}\, x_\beta \,, \quad \text{für } \varkappa = 1, 2, 3, 4 .$$

Man fügt zudem meist die Bedingung hinzu, daß die Determinante der Coefficienten $|c_{\varkappa\beta}| \gtrless 0$ ist,

d. h. die Bedingung, welche angiebt, dass die angeführten Beziehungen sich auch umkehren lassen. Doch ist es oft auch von Interesse, die Fälle verschwindender Determinante zu behandeln. Man vergleiche in dieser Hinsicht die Vorlesung 1881/82 über „projektive Geometrie" in der als Ausgangspunkt ein solcher Fall gewählt ist. Es handelte sich dort darum, den ganzen Raum auf eine Ebene zu beziehen. [nach Art der „malerischen Perspektive."]

Collineation nennt man die aufgestellte Beziehung, weil jeder geraden Linie des Raumes x eine Gerade des Raumes y entspricht.

Wir haben ferner bereits im vorigen Winter gelernt, dass diese geometrische Eigenschaft umgekehrt charakteristisch ist für die analytische Beziehung, mit der wir es hier zu thun haben.

„Die Collineation ist das geometrische Gegenbild der linearen Substitution."

Wir betrachten weiter die speziellere Aufgabe, die sich ergiebt, wenn wir x und y in denselben Raume deuten. Es drängt sich dann nämlich sofort die Frage auf, ob es nicht Punkte giebt, die sich selbst entsprechen. Solche Punkte werden offenbar durch unsere Gleichung gegeben, wenn wir y_α mit x_α vertauschen. Wir haben alsdann:

$\varrho \cdot x_\alpha = \Sigma_\beta c_{\alpha\beta} x_\beta$, für $\alpha = 1, 2, 3, 4$ oder ausführlich geschrieben.

$$\begin{aligned} 0 &= (c_{11} - \varrho) x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{14} x_4 . \\ 0 &= c_{21} x_1 + (c_{22} - \varrho) x_2 + c_{23} x_3 + c_{24} x_4 . \\ 0 &= c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + (c_{33} - \varrho) x_3 + c_{34} x_4 . \\ 0 &= c_{41} x_1 + c_{42} x_2 + c_{43} x_3 + (c_{44} - \varrho) x_4 . \end{aligned}$$

Durch Elimination der x_1, x_2, x_3, x_4 bekommen wir für ϱ die sogenannte „charakteristische" Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \varrho & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0 .$$

Die nähere Untersuchung der festbleibenden Punkte hängt alsdann von den Specialfällen dieser Gleichung ab, und es giebt in dieser Hinsicht eine erschöpfende Theorie, die Elementartheilertheorie von Weierstrass. [1868. Berliner Monatsberichte. „Zur Theorie der bilinearen Formen."] Dieselbe, die sich überhaupt auf die Classification von Determinanten folgender Art bezieht:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - d_{11}\varrho & c_{12} - d_{12}\varrho & \cdots & c_{1n} - d_{1n}\varrho \\ c_{21} - d_{21}\varrho & c_{22} - d_{22}\varrho & \cdots & c_{2n} - d_{2n}\varrho \\ \vdots & & & \\ c_{n1} - d_{n1}\varrho & c_{n2} - d_{n2}\varrho & \cdots & c_{nn} - d_{nn}\varrho \end{vmatrix} ,$$

findet bei den verschiedensten algebraischen Fragen ihre Anwendung, so im vorigen Falle zu den Lamé'schen Funktionen, als es sich um das gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen 2ten Grades handelte, so jetzt, wo es sich um die fest bleibenden Punkte einer Collineation handelt."

Die spezielle Frage der Collineation ist nun eine der Elementarteilertheorie von Elgar, einem jungen italienischen Geometer, behandelt im Bd. 19. der „Memorie dei Lincei 3. ser. 1884." unter dem Titel „Classificazione delle omografie", und zwar für den Fall von n homogenen Variabeln. Wir geben dies Citat um so lieber, zumal wir nicht eingehend diesen Betrachtungen uns werden hingeben können.

„Die Elementarteilertheorie, hat es nämlich mit der Frage zu thun, ob gegebenenfalls unsere charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln hat, und wie sich in einem solchen Falle für einen vielfachen Wurzelwert die Unterdeterminanten verhalten."

Von all den Möglichkeiten, die sich in dieser Hinsicht bei $n = 4$ ergeben, wollen wir nur 3 anführen:

1.) Die charakteristische Gleichung möge 4 gleiche

"Wurzeln $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ besitzen." In diesem allgemeinen Falle wird jeder Wurzelwerte ξ ein bestimmter festbleibender Punkt entsprechen.

„Im allgemeinen" bleiben daher bei einer Collineation 4 getrennte Punkte fest."

2.) Es seien 2 Wurzeln $\xi_2 \xi_3 \xi_4$ einander gleich, die vierte Wurzel ξ_1 von ihnen verschieden. Außerdem wollen wir voraussetzen, daß für den Wert $\xi = \xi_2$ auch alle 2ten Unterdeterminanten, [und damit natürlich auch die ersten Unterdeterminanten] verschwinden sollen (was keineswegs stets der Fall zu sein braucht.). Für $\xi = \xi_2$ sind alsdann die 4 Gleichungen $\xi x_\alpha = \sum c_{\alpha\beta} x_\beta$ selbstverständlich miteinander verträglich d. h. eine ist eine Folge der übrigen, dagegen für $\xi = \xi_2$ sind 3 derselben überflüssig, wir behalten nur eine Gleichung zur Bestimmung der x übrig.

Die geometrische Deutung ist: daß $\xi = \xi_2$ entsprechend ein einzelner Punkt A des Raumes fest bleibt für die dreifache Wurzel $\xi = \xi_2$ aber eine ganze Ebene E von Punkten festbleibt."

Fig. 11

Zieht man durch den Punkt A eine beliebige Gerade, so erkennt man, daß auch diese

als solche festbleibt, doch so, daß auf ihr die einzelnen Punkte eine Verschiebung erleiden können, (angenommen die Punkte A und B).

Diese Art der Collineation gibt dann geometrisch den Fall der sogenannten Centralperspektive *) in der alle Punkte auf geraden Linien verrückt werden welche durch ein festes Centrum laufen, so zwar, daß die Punkte einer gewissen festen Ebene, der Hauptebene der Perspektive auch noch sämmtlich ungeändert bleiben."

3.) Es sei jetzt $\varrho_1 = \varrho_2$ und $\varrho_3 = \varrho_4$. Außerdem wollen wir annehmen, daß für jede dieser Doppelwurzeln alle ersten Unterdeterminanten in $|c_{\alpha\beta}|$ gleich 0 sind, d.h. daß jedesmal von den 4 Gleichungen nur 2 in Betracht kommen.

Dann bekommen wir für jede der beiden Doppelwurzeln eine aus festbleibenden Punkten bestehende gerade Linie als Schnitt der durch die beiden Gleichungen dargestellten Ebenen."

Fig. 12.

Ziehen wir eine beliebige, diese in ihren einzelnen Punkten festen Geraden schneidende, dritte Gerade, so wird diese 4 solche festbleiben, da ihre Schnittpunkte

*) auch wohl gewöhnliche Rückperspektive genannt.

A und B, „die Stützpunkte," absolut fest sind, wohl aber im übrigen eine Verschiebung ihrer Punkte erleiden können.

Geometrisch bedeutet diese Collineation daher eine sogenannte windschiefe Perspektive, bei welcher der Bildpunkt eines beliebigen Punktes mit dem gegebenen Punkte immer auf einer 2 feste Gerade treffenden geraden Linie liegt."

Sprechen wir jetzt von den Collineationen, die eine Fläche 2ten Grades in sich selber überführen.

Es sei gegeben die allgemeine Fläche 2ten Grades: $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$. Die Frage, durch wie viel Collineationen diese Fläche in sich selber übergeführt werden kann, erledigt sich leicht durch eine einfache Abzählung. Es giebt allgemein ∞^{15} Collineationen im Raume von 3 Dimensionen. Denn in den eine Collineation bestimmenden Gleichungen haben wir 16 Constante, deren Verhältnisse jedoch nur wesentlich sind.

Flächen 2ten Grades giebt es aber nur ∞^9. Da nun durch jede Collineation aus einer Fläche 2ten Grades wieder eine solche entsteht, auch jede Fläche, wie wir früher sahen, in jede andere

durch Collineation übergehen kann, so können wir sofort schließen, daß dieser Abzählung zufolge jede allgemeine Fläche 2ten Grades durch $\frac{\infty^{15}}{\infty^{9}} = \infty^{6}$ fach verschiedene Collineationen in sich übergeführt wird.

Dies können wir noch auf eine andere Weise bestätigen. Wir wissen, daß wir auf 6fach ∞ viele Weise eine gegebene Fläche 2ten Grades auf ein Polartetraeder mit der Gleichung $\Sigma x^2 = 0$ beziehen können. Jede Collineation nun, die das zu Grunde gelegte Polartetraeder in ein anderes (zu dem dieselbe Gleichungsform gehört) überführt, wird auch die gegebene Fläche in sich überführen. Jenes ist aber auf ∞^6 fache Weise möglich.

Diese sechsfach unendlich vielen Collineationen zerfallen jedoch in zwei Arten, in 6fach ∞ viele Collineationen der ersten Art und in 6fach ∞ viele Collineationen der zweiten Art.

Folgendermaßen:

Die erste Schaar von Transformationen führt das einzelne erzeugende System der Fläche 2ten Grades in sich selbst über, die zweite Art von Transformationen vertauscht die beiden Systeme von Erzeugenden mit einander."

Man unterscheidet diese beiden Arten von

Collineationen auch wohl als die eigentliche und die uneigentliche Transformation. Hiernach bilden alsdann die eigentlichen Transformationen eine Gruppe, die uneigentlichen nicht, d.h. 2 eigentliche Transformationen nacheinander angewandt geben wieder eine eigentliche Transformation, nicht aber 2 uneigentliche. Dies aber ist gerade mit der Bezeichnung „Gruppe" gemeint.

Nun wollen wir einen Ausblick auf die Nicht-Euklidische Geometrie werfen. Dort werden wir in Cayleyscher Weise eine Fläche 2ten Grades zu Grunde legen. „Die eigentlichen Transformationen werden dann die Bewegungen des Nicht-Euklidischen Raumes sein, die uneigentlichen dagegen werden solche sein, die die Raumfiguren in ihre Spiegelbilder *) überführen."

Die beiden Arten der Collineationen wollen wir jedoch noch etwas näher betrachten.

1.) Die eigentliche Collineation. Wir werden hier eine fundamentale Schlußweise anwenden, die wir auch im vorigen Semester bereits benutzten, als es sich darum handelte, einen Kegelschnitt in sich selbst überzuführen. Die Erzeugenden der

*) Eine Raumfigur ist mit ihrem Spiegelbilde nicht kongruent, da rechts und links bei beiden Figuren vertauscht ist.

beiden Arten seien entsprechend durch die Parameterwerte λ und μ festgelegt. Bei der eigentlichen Collineation geht jede Erzeugende λ in eine Erzeugende λ' [der ersten Art], und eine Erzeugende μ in eine Erzeugende μ' [der zweiten Art] über. Wie hängt nun λ' mit λ und μ' mit μ zusammen? Sie hängen zunächst sicher algebraisch zusammen; denn die Punktcoordinaten erfahren eine algebraische Transformation, und die λ und μ sind andererseits algebraische Funktionen der x. Aber sie hängen auch eindeutig zusammen, denn aus jeder Erzeugenden λ wird nur eine Erzeugende λ' und entspr. aus jedem μ nur eine μ' und umgekehrt. Die einzige eindeutige und eindeutig umkehrbare algebraische Funktion einer Variabeln ist aber die gebrochene Funktion ersten Grades mit nicht verschwindender Determinante. Es folgt daher:

$$\lambda' = \frac{a\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{und} \quad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}, \quad \text{wobei}$$

noch $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ und $ad - bc \geq 0$ ist.

„Jede eigentliche Collineation bewirkt demnach eine Verschiebung der Erzeugenden der Fläche über die Fläche hin, welche durch Formeln der folgenden Art gegeben ist:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\,; \qquad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}\,,$$

wo $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ *) und $ad - bc \geq 0$.

In den Formeln kommen je drei wesentliche Constante **) vor, wir haben aber ∞^6 Collineationen, unsere 2. 3 Constante sind daher keiner Bedingungsgleichung unterworfen. Da wir im algebraischen Gebiete uns bewegen, so wird auch in der That *jedes* Wertesystem von Coefficienten unter Berücksichtigung der angeführten Bedingungen möglich sein.

„Umgekehrt wird daher auch jede lineare Substitution von λ: $\lambda = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$, wobei $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ ist, verbunden mit einer linearen Substitution von μ: $\mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}$, wobei $ad - bc \geq 0$ ist, eine eigentliche Collineation der Fläche zweiten Grades in sich nach sich ziehen."

Wir können nun auch homogen schreiben:

*) Es entspricht dies unserer Annahme, die lineare Substitution der X mit verschwindender Determinante ausschließt.

**) Denn nur das Verhältnis der 4 Coefficienten ist massgebend. Wir wollen übrigens bemerken, daß wir die Mannigfaltigkeit einer complexen Variabeln eine *einfach* unendliche Mannigfaltigkeit nennen.

$\varrho \cdot \lambda_1' = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 \cdot$ und $\sigma \cdot \mu_1' = a \mu_1 + b \mu_2$:
$\varrho \cdot \lambda_2' = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2 \cdot$ $\sigma \cdot \mu_2' = c \mu_1 + d \mu_2$

Die quaternären linearen Substitutionen der bezeichneten Art erscheinen so in 2 Arten binärer linearer Substitutionen gespalten.

In betreff dieser binären linearen Substitution wollen wir nun wieder die Frage aufwerfen: Giebt es festbleibende Elemente? Die Antwort hängt offenbar von den Determinanten ab:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\varrho & \beta \\ \gamma & \delta-\varrho \end{vmatrix} = \sigma \text{ und } \begin{vmatrix} a-\sigma & b \\ c & d-\sigma \end{vmatrix} = \sigma,$$ welche nach Weierstraß zu classificieren sein werden. Wir wollen hier nur 2 Fälle zur Sprache bringen.

1.) Die Determinanten mögen je 2 getrennte Wurzeln haben: ϱ_1 und ϱ_2 — σ_1 und σ_2. Die besagt, daß je zwei Erzeugende der einen und der anderen Art festbleiben. Diese 4 Erzeugenden bilden ein windschiefes Viereck, dessen Ecken alsdann gleichfalls festbleiben. [In der Figur ist als $\mathfrak{f}_2$ ein einschaliges Hyperboloid gewählt.] Es ist dies der „allgemeine" Fall. Verbindet man die gegenüberliegenden Ecken des Vierecks mit einander, so erkennt man leicht:

„Im allgemeinen Falle, wenn unsere beiden

binären Substitutionen jede 2 festbleibende Elemente liefert, ist das räumliche Tetraeder, welches bei der betreffenden Collineation festbleiben muss, dasjenige Tangentialtetraeder unserer Fläche 2ten Grades, welches durch dieses Viereck festgelegt ist."

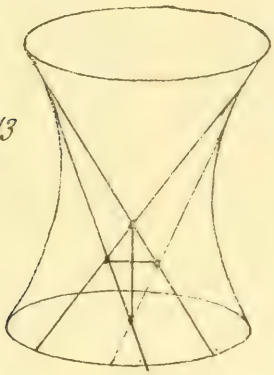


Fig 13

2.) Nun wollen wir noch einen sehr einfachen speciellen Fall betrachten. Es sei: $\mu' = \mu$, d. h. die Erzeugenden der zweiten Art werden gar nicht geändert,*) so dass nur die Erzeugenden der ersten Art auf der Fläche verschoben werden. Wir wollen eine solche Operation eine Schiebung erster Art nennen, entsprechendes gilt für die Schiebung zweiter Art; dies ist diejenige Operation, bei der nur μ substituiert wird, λ dagegen festbleibt.

Wir erkennen sofort:

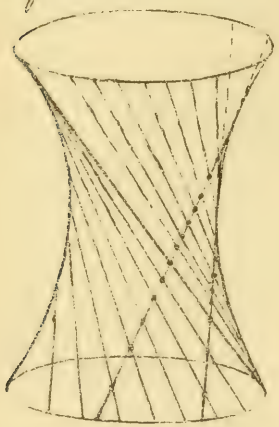
„Jede eigentliche Collineation der Flächen 2ten Grades in sich kann als die Aufeinanderfolge zweier solcher Schiebungen angesehen werden."

*) cf. pag. 104.

Was stellt nun eine solche Schiebung für eine Raumtransformation vor?

„Bei einer Schiebung erster Art z. B. bleiben nicht nur alle Erzeugenden zweiter Art fest, sondern auch 2 Erzeugende der ersten Art, die wir als gepaart denken wollen, und es ist dann klar, daß alle einzelnen Punkte dieser beiden Erzeugenden stehbleiben müssen, woraus dann weiter folgt, daß unsere Raumcollineation eine windschiefe Perspektive ist, welche die genannten 2 Erzeugenden zu Leitlinien hat."

Fig. 14



Analoges gilt auch von den Schiebungen zweiter Art. Dort sind zwei Erzeugende zweiter Art mit ihren sämmtlich Punkten fest und Leitlinien einer windschiefen Perspektive.

Wir schließen weiter:

„Umgekehrt wird auch jede windschiefe Perspektive, deren Leitlinien einer Fläche 2ten Grades angehören,

*) Die Determinante $\begin{vmatrix} a\sigma & b \\ c & d-\sigma \end{vmatrix}$ hat dann die Doppelwurzel $\sigma = t$, für welche alle 2-gliedrigen Unterdeterminanten derselben verschwinden.

eine Schiebung für diese Fläche 2ten Grades vorstellen, d.h. die Fläche wird in sich übergehen, indem sich nur die Linien der einen Erzeugenden unter einander vertauschen, alle Linien der anderen Erzeugung aber erhalten bleiben, d.h. sich nur in sich selbst verschieben."

Wir gehen nun über zu den

2./ uneigentlichen Transformationen. Wir wollen hier nur 2 Thatsachen angeben:

" Jede uneigentliche Collineation schreibt sich in den λ und μ:

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad ; \quad \mu = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \text{ wo nimmer}$$

$ad - bc \gtrless 0$. und umgekehrt bedeutet jede solche

$\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$. Formengruppe eine uneigentliche Collineation der Fläche 2ten Grades in sich selbst."

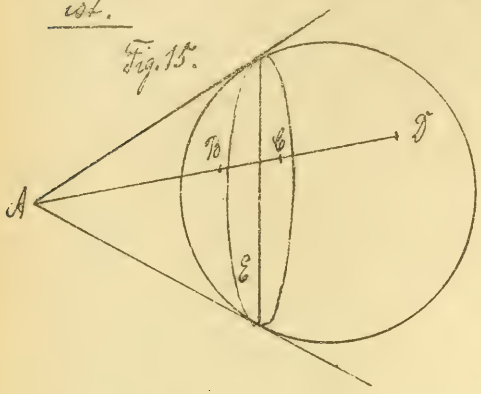
Die zweite Bemerkung ist die:

" Ein specieller Fall einer uneigentlichen Collineation ist die Centralperspektive am Pol und Polarebene, die wir gewöhnlich schlechtweg als Spiegelung bezeichnen."

" Bei einer solchen Centralperspektive verschiebt sich in jeder durch den Pol P laufende Strahl in der Art in sich selbst, daß jeder Punkt B eines solchen Strahles durch den anderen B

ersetzt wird, der mit ihm zum Schnitt C mit der Polarebene E und zum Pol selbst harmonisch ist."

Fig. 15.



Wir wollen einmal ein Polartetraeder einführen, dessen erste Ecke A ist. Dann lautet die Gleichung der F_2:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0.$$

Die Centralperspektive, welche die Fläche in sich selbst überführt, ist dann gegeben durch:

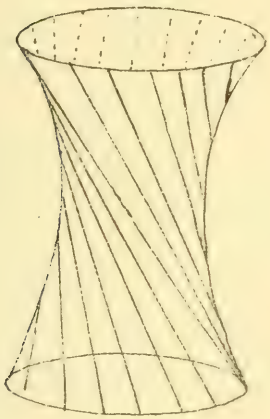
$$x_1' = -x_1.$$
$$x_2' = x_2.$$
$$x_3' = x_3.$$
$$x_4' = x_4.$$

, sodass also nur eine Coordinate im Vorzeichen geändert wird. Das Wort „Spiegelung" bezieht sich aber wieder auf die Nicht-Euklidische Geometrie. Es ist dies in der That für die auf die F_2 zu gründende Cayley'sche Maassbestimmung der analoge Process, wie die gewöhnliche Spiegelung in der Euklidischen Geometrie.

„Dass eine solche Spiegelung aber eine uneigentliche Collineation ist, bei der sich die beiden Arten

der Erzeugenden vertauschen, sieht man am einschaligen Hyperboloid, sobald man als Pol das eigene Auge wählt, so daß die uns zugekehrte Seite des Hyperboloids mit der uns abgekehrten bei der Centralprojektion vertauscht wird."

Fig. 16.



Dies läßt sich natürlich auch analytisch bestätigen. Schließlich wollen wir noch anführen:

"Verbindet man eine beliebige uneigentliche Collineation mit einer solchen Spiegelung, so bekommt man eine eigentliche Collineation. Die uneigentliche Collineation kann also als eine Combination einer eigentlichen und einer Spiegelung angesehen werden."

Hiermit wollen wir die allgemeine algebraische Theorie der Collineation abschließen und uns zur Betrachtung der Realitätsverhältnisse wenden, indem wir die drei Typen der allgemeinen Flächen 2ten Grades gesondert behandeln. Wir beginnen mit den mehrteiligen Flächen.

Nullteilige Flächen im besondere.

Die Fläche sei, auf ein reelles Polartetraeder bezogen, auf die Form gebracht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Wir wollen nun die Substitutionen:

$$x_1' = \Sigma\, c_{1\beta}\, x_\beta\,; \quad x_2' = \Sigma\, c_{2\beta}\, x_\beta\,;$$

$$x_3' = \Sigma\, c_{3\beta}\, x_\beta\,; \quad x_4' = \Sigma\, c_{4\beta}\, x_\beta$$ bestimmen, welche die Fläche in sich selber überführen. Die resultierende Gleichung muß daher wieder die Form haben:

$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0$. Diese Aufgabe geht parallel mit der rein formentheoretischen Aufgabe, die quaternäre Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ in sich selbst durch lineare Transformationen zu transformieren. Man nennt diese Aufgabe eine "orthogonale Substitution."

"Alle Collineationen zu bestimmen, welche eine nullteilige Fläche in sich überführen, ist daher im wesentlichen dieselbe Aufgabe wie die Aufgabe der orthogonalen Substitution bei 4 Veränderlichen."

Man unterscheidet nun in den Lehrbüchern 2 Classen orthagonaler Substitutionen, je nachdem die Determinante der Coefficienten $|c_{\alpha\beta}| = +1$ oder -1 ist (die orthogonale Substitution

erster und zweiter Art.) Wir wollen historisch bemerken, daß insbesondere die orthogonalen Substitutionen mit der Determinante +1 den eigentlichen Collineationen, die mit der Determinante -1 den uneigentlichen Collineationen entsprechen.

Über das Problem der orthogonalen Substitution ist nun eine weitschichtige Litteratur vorhanden. Wir wollen hiervon nur Einiges berichten. Haben wir n Variable, so treten in den homogenen linearen Substitutionsgleichungen n^2 Coefficienten auf. Substituieren wir nun die so erhaltenen x' in den Ausdruck $\sum_{ik}^{n} x_{ik}'^2$, so ergeben sich, da die resultierende Form die Gestalt $\sum_{ik}^{n} x_{ik}^2$ haben soll, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Gleichungen aus dem Verschwinden der Coefficienten der Glieder $x_l x_m$ für l, m und n Gleichungen aus der Forderung, daß die Coefficienten der quadratischen Glieder gleich eins sein sollen. Wie leicht zu sehen, sind also von den n^2 Constanten der Substitution nur

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{1.2}$$ von einander unabhängig.

Wir müssen nun vor allen Dingen die Arbeit von Cayley erwähnen, Crelle 32 (1846): „Sur quelques Propriétés des Déterminants gauches." (Diese Abhandlung findet sich auch

wieder abgedruckt in Cayley's Werken Bd. 1. N°. 52).

„Cayley löst dort die schon von Euler gestellte Aufgabe, die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ einer orthogonalen Substitution erster Art als rationale Funktionen von unabhängigen $\frac{n(n-1)}{2}$ Größen wirklich hinzuschreiben."

Wir wollen diese Lösung hier wiedergeben. Cayley sagt, wir setzen: $2z_\alpha = x_\alpha + x'_\alpha$, d. h. die z_α seien die arithmetischen Mittel der x_α und x'_α. Sind diese z_α nun von einander linear unabhängig? Um dies zu entscheiden, setzen wir für die x'_α ihren Wert $\sum_\beta c_{\alpha\beta} x_\beta$ und stellen die Determinante der Coefficienten der x_α auf. Diese lautet:

$$\begin{vmatrix} c_{11}+1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}+1 & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

Man findet nun, im Falle der orthogonalen Substitution erster Art ist diese Determinante $\neq 0$; im Falle der Substitution zweiter Art dagegen hat sie den Wert 0. Hieraus folgt:

„Die z_α sind lineare unabhängige Funktionen

der x'_α im Falle der orthogonalen Substitution erster Art, im anderen Falle sind sie linear abhängig und die ganze folgende Entwickelung kommt darum nicht in Betracht."

Es wird nun weiter:

$\Sigma x'^2_\alpha = 4 \Sigma \xi^2_\alpha - 4 \Sigma \xi_\alpha x_\alpha + \Sigma x^2_\alpha$. Da nun

$\Sigma x'^2_\alpha = \Sigma x^2_\alpha$ werden soll, so muss die Beziehung gelten:

$\Sigma \xi^2_\alpha = \Sigma \xi_\alpha x_\alpha$. Wir werden jetzt die x_α durch die ξ_α linear ausdrücken; es ist dies eben bei den Substitutionen erster Art aus dem angegebenen Grunde stets möglich. Wir werden etwa erhalten:

$x_1 = \lambda_{11} \xi_1 + \lambda_{12} \xi_2 + \lambda_{13} \xi_3 + \ldots\ldots$

$x_2 = \lambda_{21} \xi_1 + \lambda_{22} \xi_2 + \lambda_{23} \xi_3 + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Wir können nun leicht die Bedingungen aufstellen, die in Rücksicht auf die Beziehung $\Sigma \xi^2_\alpha = \Sigma \xi_\alpha x_\alpha$ zwischen den Coefficienten λ bestehen müssen. Es muss sein: $\lambda_{\alpha\alpha} = 1$, $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$. Man kann demnach die $\lambda_{\alpha\beta}$ beliebig wählen, wenn man nur dem $\lambda_{\beta\alpha}$ absolutum den negativen Wert der $\lambda_{\alpha\beta}$ zuerteilt. Zusammenfassend sagen wir:

" Um die allgemeinste orthogonale Substitution erster Art zu finden, setze man $x'_\alpha = \Sigma \lambda_{\alpha\beta} \xi_\beta$ mit

der Bedingung, daß alle $\lambda_{\alpha\alpha} = 1$ und $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$ sein soll. *)

Dann hat man x'_α nur noch gleich $2z_\alpha - x_\alpha$ zu setzen und, will man direkt die x'_α durch die x_α ausdrücken, die z_α aus den Gleichungssystemen zu eliminieren."

Wir wollen, um die Formeln ganz zu übersehen, für den Fall $n = 4$ dieselben einmal vollständig hinschreiben. Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1 + \underline{\lambda_{12} z_2} + \underline{\lambda_{13} z_3} + \lambda_{14} z_4 .\\
x_2 &= (\lambda_{21} z_1) + z_2 + \underline{\lambda_{23} z_3} + (\lambda_{24} z_4)\\
x_3 &= (\lambda_{31} z_1) + (\lambda_{32} z_2) + z_3 + \underline{\lambda_{34} z_4}\\
x'_4 &= (\lambda_{41} z_1) + \lambda_{42} z_2 + (\lambda_{43} z_3) + z_4 .
\end{aligned}
$$

Wir wählen als unabhängige Coefficienten die 6 folgenden: $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_{42}, \lambda_{23}$, die in den Gleichungen unterstrichen sind, während die eingeklammerten Größen den entsprechenden unterstrichenen entgegengesetzt gleich seien. Dann finden wir für die $x'_\alpha = 2z_\alpha - x_\alpha$ die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= z_1 + (\lambda_{21} z_2) + (\lambda_{31} z_3) + (\lambda_{41} z_4) .\\
x'_2 &= \underline{\lambda_{12} z_1} + z_2 + (\lambda_{32} z_3) + \underline{\lambda_{42} z_4} .\\
x'_3 &= \underline{\lambda_{13} z_1} + \underline{\lambda_{23} z_2} + z_3 + (\lambda_{43} z_4) .\\
x'_4 &= \underline{\lambda_{14} z_1} + (\lambda_{24} z_2) + \underline{\lambda_{34} z_3} + z_4 .
\end{aligned}
$$

*) Man nennt eine solche Substitution wohl „antisymmetrisch".

und wenn wir die orthogonale Substitution haben wollen, d. h. wissen wollen, wie die x' sich durch die x ausdrücken, so müssen wir die z aus diesen beiden Gleichungssystemen eliminieren. Wir führen nun die Bezeichnung „schiefe Substitution" ein für diejenige Substitution, bei der die zur Diagonale symmetrischen Coefficienten entgegengesetzt gleich, die Coefficienten der Diagonalglieder dagegen einander gleich, beziehungsweise gleich 1 sind.

Unser Resultat lautet dann in Worten:

„Man erhält die allgemeinste orthogonale Substitution erster Art, indem man die x und x' aus den Hilfsgrößen z je durch eine schiefe Substitution zusammensetzt, von denen die eine die transponierte (*) der anderen ist, und dann die Hilfsgrößen z eliminiert."

Dies ist die ursprüngliche Cayley'sche Theorie, welche an die Zahl der Variabeln gar nicht geknüpft ist. Für den Fall $n = 4$ den wir speziell durchgeführt haben, ergibt sich nun noch eine andere Darstellung der orthogonalen Substitution und zwar auf geometrischer Basis beruhend, indem wir auf die Operationen der Schiebungen bei den Flächen 2ten Grades zurückgehen.

*) v. Winterwerlesung.

„Bei $n = 4$ müssen sich nämlich die hier erhaltenen Formeln mit 6 willkürlichen Coefficienten in die Aufeinanderfolge zweier kleinerer Formeln spalten lassen, von denen jede nur 3 willkürliche Constanten enthält, dem Umstande entsprechend, dass sich die allgemeine Collineation erster Art der Flächen 2ten Grades in sich selbst durch die Aufeinanderfolge zweier Schiebungen erzielen lässt."
(v. pag. 105).

Wir werden so zu Formeln gelangen, die Cayley gleichfalls gefunden hat, ohne dass er angiebt, auf welchem Wege er dazu gekommen ist. Die in Betracht kommende Abhandlung von Cayley findet sich Crelle Bd. 50 (1855); sie ist wieder abgedruckt in Bd. II seiner Werke № 37: „Recherches Ultérieures sur les Déterminants gauches."

Wir wollen diese Formeln jetzt auf unserem Wege ableiten. Unsere nächsten Entwickelungen werden sich übrigens allgemein auf Flächen 2ten Grades beziehen, nicht nur auf mittelstige Flächen. Wir gehen von der Gleichung der Fläche zweiten Grades, der ein Polartetraeder zu Grunde liegt: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0$ zu der auf ein Tangentialtetraeder bezogenen Gleichungsform über, indem wir setzen:

$y_1 = x_1 + ix_3$; $\quad y_2 = x_2 + ix_4$

$y_3 = x_1 - ix_3$; $\quad y_4 = x_2 - ix_4$

Wir erhalten die Gleichung: $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$. Wir werden zur Durchführung der Rechnung weiterhin auch die inversen Operationen gebrauchen, welche die x durch die y ausdrücken:

$2x_1 = y_1 + y_3$; $\quad 2x_3 = i(-y_1 + y_3)$.

$2x_2 = y_2 + y_4$; $\quad 2x_4 = i(-y_2 + y_4)$.

Gestützt auf die Gleichung: $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ führen wir nun die Parameter λ und μ der Erzeugenden erster und zweiter Art ein und zwar sogleich in homogener Form: $\left(\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$. Die Erzeugenden erster und zweiter Art sind dann gegeben durch die Gleichungspaare:

1.) $\begin{cases} \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1 = 0. \\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 y_4 = 0. \end{cases}$ und 2) $\begin{cases} \mu_1 y_4 - \mu_2 y_1 = 0. \\ \mu_1 y_3 + \mu_2 y_2 = 0. \end{cases}$

Der neue Gedanke, den wir bislang noch nicht gefasst hatten, besteht dann darin, dass wir die Coordinaten eines Flächenpunktes durch λ und μ ausdrücken; wir können dies, da durch jeden Punkt der Fläche <u>eine</u> Erzeugende λ und <u>eine</u> Erzeugende μ hindurchgeht; mit anderen Worten, wir lösen die 4 Gleichungen nach den y_α auf, indem

wie die λ und μ als bekannt ansehen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varrho\, y_1 &= \lambda_1 \mu_1 . \\ \varrho\, y_2 &= \lambda_2 \mu_1 . \\ \varrho\, y_3 &= \lambda_2 \mu_2 . \\ \varrho\, y_4 &= \lambda_1 \mu_2 . \end{aligned}$$

Wir führen nun eine Schiebung erster Art und zugleich eine Schiebung zweiter Art aus, dieselben sind charakterisiert durch eine lineare Substitution der λ resp. der μ mit nicht verschwindender Determinante.

Wir setzen also:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 . \\ \lambda_2' &= \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2 ; \text{ wo } \alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0 \text{ sei, und:} \\ \mu_1' &= a \mu_1 + b \mu_2 . \\ \mu_2' &= c \mu_1 + d \mu_2 ; \text{ wo } ad - bc \gtrless 0 \text{ sei.} \end{aligned}$$

Bei diesen Operationen werden die Punkte y in Punkte y' übergehen. Es wird alsdann:

$$\begin{aligned} \varrho' y_1' &= \lambda_1' \mu_1' = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)(a\mu_1 + b\mu_2) = (\alpha a y_1 + \beta a y_2 + \beta b y_3 + \alpha b y_4) \cdot \varrho . \\ \varrho' y_2' &= \lambda_2' \mu_1' = (\gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2)(a\mu_1 + b\mu_2) = (\gamma a y_1 + \delta a y_2 + \delta b y_3 + \gamma b y_4) \cdot \varrho . \\ \varrho' y_3' &= \lambda_2' \mu_2' = (\gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2)(c\mu_1 + d\mu_2) = (\gamma c y_1 + \delta c y_2 + \delta d y_3 + \gamma d y_4) \cdot \varrho . \\ \varrho' y_4' &= \lambda_1' \mu_2' = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)(c\mu_1 + d\mu_2) = (\alpha c y_1 + \beta c y_2 + \beta d y_3 + \alpha d y_4) \cdot \varrho . \end{aligned}$$

„Damit haben wir dann in der That die quaternäre Collineation gefunden, welche den binären Substitutionen der λ, μ entspricht."

Wollen wir insbesondere eine quaternäre Substitution mit der Determinante 1 haben, so werden wir nur jede der zuletzt hingeschriebenen Gleichungen durch die vierte Wurzel aus der Coefficienten-Determinante beiderseits zu dividieren haben. Es zeigt sich nun, daß letztere gleich $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2(ad-bc)^2$ ist. Wir erhalten also nach Ausführung der angegebenen Operation, indem wir zugleich links den Proportionalitätsfaktor fortlassen:

$$y_1' = \frac{(\alpha a y_1 + \beta a y_2 - \beta b y_3 + \alpha b y_4)}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)(ad-bc)}}$$; analog lauten die Gleichungen für y_2', y_3', y_4'. Wir begleiten dies mit den Worten:

„Insbesondere bekommen wir eine quaternäre lineare Substitution von der Determinante +1, indem wir jeden unserer 4-gliedrigen linearen Ausdrücke auf der letzten Seite durch $\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)(ad-bc)}$ dividieren."

Wir wollen diese Formeln nun ausdrücklich hinschreiben für den Fall, daß wir nur eine Schiebung der ersten Art haben, daß diese also eine identische Substitution erleiden.

Es wird:

$$y_1' = \frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)}} \; ; \; y_3' = \frac{\delta y_3 - \gamma y_4}{\sqrt{(\alpha\delta-\beta\gamma)}}.$$

$$y'_2 = \frac{\gamma y_1 + \delta y_2}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)}} \quad ; \quad y'_4 = \frac{-\beta y_3 + \alpha y_4}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)}}.$$

Wir werden jetzt zu den Coordinaten x zurückgehen, indem wir die Substitutionsformeln auf pag. 775. anwenden. Die hierbei nötig werdende Rechnung ist sehr einfach, wir geben sogleich das Resultat an:

$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_1 = (\alpha+\delta)x_1 + (\beta-\gamma)x_2 + i(\alpha-\delta)x_3 + i(\beta+\gamma)x_4 .$$
$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_2 = (-\beta+\gamma)x_1 + (\alpha+\delta)x_2 + i(\beta+\gamma)x_3 + i(-\alpha+\delta)x_4 .$$
$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_3 = i(-\alpha+\delta)x_1 + i(-\beta-\gamma)x_2 + (\alpha+\delta)x_3 + (\beta-\gamma)x_4 .$$
$$2\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, x'_4 = i(-\beta-\gamma)x_1 + i(\alpha-\delta)x_2 + (-\beta+\gamma)x_3 + (\alpha+\delta)x_4 .$$

Diese Substitutionsformeln für eine Schiebung erster Art enthalten noch die imaginäre Einheit i; wir werden daher jetzt die $\alpha\beta\gamma\delta$ so in einen reellen und imaginären Teil zu spalten suchen, daß alles Imaginäre aus unseren Formeln herausfällt. Dies wird geleistet, wenn wir setzen:

$$\alpha = A + iC \quad ; \quad \beta = -B + iD.$$
$$\delta = A - iC \quad ; \quad \gamma = +B + iD. \text{ Die Substi-}$$

tution, welche λ erleidet, lautet dann:

$$\lambda = \frac{(A+iC)\lambda - B + iD}{(B+iD)\lambda + A - iC} .$$ Wir können nun fragen, worauf es beruht, daß die Coefficienten $\alpha\beta\gamma\delta$ diese merkwürdige Form haben. Wir werden

die nunmehr noch keine Ausführung, wenn wir die bei der Collineation festbleibenden Punkte berechnen. Wir werden finden, daß diese besondere Form $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ bedingt, daß die beiden bei der Substitution festbleibenden Werte von λ diametral imaginär sind, und umgekehrt durch die Forderung, daß sie es sein sollen, festgelegt wird.

„Es müssen nämlich in der That bei einer reellen Schiebung zwei konjugiert imaginäre Erzeugende festbleiben, und diesen korrespondieren, wie wir von früher her wissen, diametrale Parameterwerte."

Tragen wir nun für die $\alpha\beta\gamma\delta$ ihre Werte in unsere Formeln ein, so kommt:

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_1' = A x_1 - B x_2 - C x_3 - D x_4 .$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_2' = B x_1 + A x_2 - D x_3 + C x_4 .$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_3' = C x_1 + D x_2 + A x_3 - B x_4 .$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}\cdot x_4' = D x_1 - C x_2 + B x_3 + A x_4 .$$

Dies sind also die Formeln, welche sich für unsere reellen Schiebungen erster Art ergeben. Sie stellen eine schiefe Substitution von besonders einfachem Aufbau dar, indem in den Diagonalgliedern überall A steht, die zur Diagonale symmetrischen Coefficienten entgegengesetzt gleich sind, ausserdem jedoch auf jeder Seite der Diagonale

je zwei der ersten Substitutionen sich sind.

Für die Schiebungen zweiter Art bekommen wir die analogen Gleichungen:

$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\cdot x_1' = A'x_1 - B'x_2 - C'x_3 - D'x_4.$$
$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\quad x_2' = B'x_1 + A'x_2 + D'x_3 - C'x_4.$$
$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\quad x_3' = C'x_1 - D'x_2 + A'x_3 + B'x_4.$$
$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}\quad x_4' = D'x_1 + C'x_2 - B'x_3 + A'x_4.$$

„Die Schiebungen zweiter Art liefern daher Formeln, welche sich von denen der ersten Art nur in 6 Vorzeichen unterscheiden."

Wir werden dann die allgemeinste Substitution der verlangten Eigenschaft erhalten, wenn wir die Substitutionen einer Schiebung erster Art und einer Schiebung zweiter Art hinter einander anwenden.

Wie werden wir diese Formeln nun leicht im Gedächtnis behalten können? In dieser Hinsicht ist die Bemerkung Cayley's, l.c. / von Interesse dass die Eigenschaft: die Summe der Quadrate der x' ist bei diesen Substitutionen immer gleich der Summe der Quadrate der x, sich in analoger Weise wieder findet in der Theorie der Hamilton'schen Quaternionen.

Wir wollen dies kurz angeben.

Unter einer Quaternione p versteht man eine vierglidrige komplexe Zahl:

$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$, wo i, j, k 3 komplexe Einheiten sind, für die spezielle Rechenregeln zu definieren sein werden. Es sei eine zweite Zahl q gegeben:

$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$. Wie man p und q addiert oder subtrahiert, davon braucht man wohl kaum zu sprechen. Was die Multiplikation von p und q angeht, so ist darüber zu sagen: man multipliciert p und q gerade so, als ob i, j, k unbestimmte Größen wären. Dann setzen wir:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$
$$jk = i, \quad ki = j, \quad ij = k.$$

Dies sind die speziellen Multiplikationsregeln, die der Rechnung mit Quaternionen zu Grunde liegen.

Nun ist:

$$\frac{j \cdot k^2 = i \cdot k}{ik = -j.} \qquad \frac{j \cdot k^2 = -j.}{}$$

Hierbei ist das Gesetz als gültig angenommen, daß $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$ ist.

So folgt aus obigen Rechenregeln, daß $j \cdot k = -i$, $ik = -j$, $ji = -k$ ist.

In Folge dieser Rechenregeln ist im Gebiete von Hamiltons Quaternionen die Multiplikation keine commutative Operation, es ist keineswegs $p \cdot q = q \cdot p$.

Rechnen wir nun einmal $p \cdot q$ aus, so kommt:

$$p \cdot q = p_0 q_0 + i p_0 q_1 + j p_0 q_2 + k p_0 q_3$$
$$- p_1 q_1 + i p_1 q_0 - j p_1 q_3 + k p_1 q_2$$
$$- p_2 q_2 + i p_2 q_3 + j p_2 q_0 - k p_2 q_1$$
$$- p_3 q_3 - i p_3 q_2 + j p_3 q_1 - k p_3 q_0 \quad \text{oder}$$
$$= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3$$
$$+ i(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)$$
$$+ j(p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1)$$
$$+ k(p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_3 q_0).$$

Das Produkt zweier Quaternionen ist daher eine dritte Quaternione. Hätten wir $q \cdot p$ gebildet, so würden gewisse Vorzeichen im Endausdruck sich geändert haben.

Die Quaternionen finden ihre hauptsächliche Anwendung in der Theorie der orthogonalen Substitutionen von 3 und 4 Veränderlichen; man kann sagen, daß gerade für diese die Quaternionenrechnung erfunden ist. Wir wollen uns insbesondere fragen:

Wie drücken sich nun unsere Substitutionen auf pag. 125 in der Quaternionensprache aus?

Es wird, wie man sich leicht überzeugt, gesetzt werden können, für die erste Formelgruppe:

$$(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') = \frac{(A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}$$

Diese eine sehr symmetrisch gebaute Formel ersetzt

vollständig die Substitutionsformeln für die Schiebungen erster Art. Was nun die abweichenden Zeichen für die Schiebungen zweiter Art angeht, so ergeben sich dieselben gerade dann, wenn wir dieselbe Formel mit vertauschter Reihenfolge der Faktoren schreiben:

$$(x_1' + ix_2 + jx_3' + kx_4') = \frac{(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' + iB' + jC' + kD')}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2}}$$

Die allgemeinste orthogonale Substitution bei 4 Veränderlichen schreibt sich dann einfach, indem wir einen Faktor M einführen:

$$M(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') =$$
$$(A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' + iB' + jC' + kD')$$

„In diesen Formeln ist in einfachster Weise unsere geometrische Theorie, daß jede eigentliche Collineation der Flächen zweiten Grades sich aus 2 Schiebungen der einen und der anderen Art zusammensetzt, analytisch formuliert." Wir fügen noch hinzu: „Für unsere geometrischen Anwendungen ist M ein Proportionalitätsfaktor. Wollen wir aber eine eigentliche orthogonale Substitution haben, soll also die Substitutionsdeterminante $= +1$ sein, so müssen wir für M den Wert in Anwendung bringen:

$$M = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2)} \quad *)"$$

*) Setzen wir in der Formel des Textes für B_1, C_1, D_1 [illegible]

Dies ist also die Theorie der eigentlichen Transformationen einer nullteiligen Fläche zweiten Grades in sich, welche sich auf Grund unserer geometrischen Betrachtungen ergiebt und die Cayley durch analytische Umformung erreichte.

„Cayley entwickelt nun ausführlich an dem genannten Orte, wie diese speciellen Formeln für $n = 4$, die so einfach und elegant sind, wie möglich, mit seinen allgemeinen Formeln, die für beliebiges n gelten, zusammenhängen." Wir wollen in dieser Hinsicht nur die eine Thatsache anführen: Wir haben die allgemeinen linearen Substitutionen durch 6 Constante $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_{42}, \lambda_{23}$ charakterisiert.

Der Vergleich von Cayley ergiebt nun:

Wir erhalten eine Schiebung erster Art, wenn $\lambda_{12} = \lambda_{34}$, $\lambda_{13} = \lambda_{42}$, $\lambda_{14} = \lambda_{23}$ ist, dagegen eine Schiebung zweiter Art, wenn: $\lambda_{12} = -\lambda_{34}$, $\lambda_{13} = -\lambda_{42}$, $\lambda_{14} = -\lambda_{23}$ ist."

Es ist nun wohl am Platze, daß wir die entwickelten Formeln auf ihren reell-geometrischen Inhalt prüfen. Was bedeutet eine solche reelle Collineation

---

Gelommen wir in M, $(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') =$
$(A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' - iB - jC - kD)$,
indem $x_1' = x_1$ wird und sich also die x_2, x_3, x_4 nur unter sich substituieren, die allgemeinste orthogonale Transformation der 3 Veränderlichen x_2, x_3, x_4.

wie sie durch eine Verschiebung erster Art dargestellt wird.? Wie wandern die Punkte des Raumes bei einer solchen Collineation? Es haben offenbar, algebraisch zu reden, 2 Erzeugende der ersten Art punktweise fest; wir haben es also mit einer windschiefen Perspektive zu thun, für die diese beiden Erzeugenden die Leitlinien sind. Diese sind nun beide wie wir wissen imaginär und zwar konjugiert imaginär, und rechts gewunden. Dann giebt es, wie wir gesehen haben, eine ganze Kongruenz reeller Linien, die diese beiden imaginären Linien schneiden, durch jeden Punkt des Raumes geht je eine bestimmte gerade Linie derselben hindurch. Diese Kongruenz ist links gewunden. Unsere Formeln besagen also:

„Wenn A, B, C, D reelle Constante verstanden, definirt der Raum eine reelle Collineation, bei der jeder Punkt auf der durch ihn hindurchgehenden gewundenen Linie einer bestimmten links gewundenen Kongruenz mit imaginären Leitlinien ein Stück weit verschoben wird."

Wir wollen nun analoge Betrachtungen, für die ringförmigen Flächen durchführen.

Es sei die Gleichung einer solchen Fläche gegeben durch:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ oder, indem wir eine reelle

Tangentialtetraeder zu Grunde legen, durch:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Wir führen in bekannter Weise die Parameter λ und μ der zwei Arten der geradlinigen Erzeugenden ein durch:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1 = 0. \\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 y_4 = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mu_1 y_4 - \mu_2 y_1 = 0 \\ \mu_1 y_3 + \mu_2 y_2 = 0. \end{cases}$$

und betrachten wieder die λ und μ als Coordinaten eines Flächenpunktes. Wir haben alsdann in gleicher Weise wie pag. 116. die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \varrho\, y_1 &= \lambda_1 \cdot \mu_1. \\ \varrho\, y_2 &= \lambda_2 \cdot \mu_1. \\ \varrho\, y_3 &= -\lambda_2 \cdot \mu_2 \\ \varrho\, y_4 &= \lambda_1 \cdot \mu_2 \end{aligned}$$

Die y_1, y_2, y_3, y_4 sind jedoch jetzt, im Gegensatz zu pag. 116., für reelle Punkte auch reell.

Eine Schiebung der ersten Art wird gegeben durch die Formeln:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{oder:} \quad \begin{aligned} \lambda'_1 &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \cdot \\ \lambda'_2 &= \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 \cdot \end{aligned}$$

Analog lauten die Formeln für eine Schiebung zweiter Art. Wir erkennen sogleich:

Es giebt jetzt ebenso wie bei der nulltheiligen Fläche dreifach ∞ viele reelle Schiebungen der einen und der anderen Art; dieselben sind jetzt dadurch

charakterisiert, daß die zugehörigen Substitutionen von λ und μ reelle Coefficienten haben."

Wir geben jetzt unseren Betrachtungen eine neue Wendung, indem wir darauf ausgehen, auf unseren Flächen zweiten Grades eine „Geometrie" zu entwerfen. Dazu war bei den nullteiligen Flächen kein Anlaß, da doch besonders reelle Verhältnisse unser Interesse beanspruchen.

Wie man in der Ebene die Gleichung: $f(x, y) = 0$ oder homogen geschrieben: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ — wo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ — als eine Curve interpretiert, so werden wir jetzt Gleichungen zwischen den λ und μ betrachten, $f(\lambda, \mu) = 0$, die wir als Curven auf der Fläche deuten. Um diese Gleichungen homogen zu machen, führen wir jedoch jetzt nicht ternäre homogene Variable ein, sondern wir setzen:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

wodurch wir eine Gleichung bekommen:

$f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$, die in den λ wie in den μ linär homogen ist.

[Hier eine doppelt-binäre Form gleich Null gesetzt —, eben eine ternäre Form gleich Null gesetzt.]

Diesem Unterschied in der homogenen

Darstellung entspricht ein Unterschied in der Auffassungsweise, den wir uns klar machen wollen, indem wir an die Ideen der Winter-vorlesung anknüpfen. [vgl. Erlanger Programm von 1872.]

In der gewöhnlichen Geometrie der Ebene betrachten wir die Figuren unabhängig von ihrer absoluten Lage und Größe. Sprechen wir von einem rechtwinkligen Dreieck, so ist es ganz gleich, an welcher Stelle der Ebene wir dasselbe gelegen sein lassen, wie groß absolut genommen sein Flächeninhalt ist; mit anderen Worten: wir betrachten die Figuren unabhängig von einer Parallelverschiebung, Drehung und (gleichmäßigen) Vergrößerung oder Verkleinerung. Bei der projektiven Auffassung, die uns hier allein interessiert, sind sogar alle die Figuren identisch, die durch Projektion aus einander hervorgehen. Diese Projektion wird gegeben durch:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}; \qquad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''};$$

oder homogen geschrieben:

$$\varrho x_1' = a x_1 + b x_2 + c x_3.$$
$$\varrho x_2' = a' x_1 + b' x_2 + c' x_3.$$
$$\varrho x_3' = a'' x_1 + b'' x_2 + c'' x_3.$$

Wir können sagen:

„ Gleichungen zwischen 2 Variabeln x und y werden in der projektiven Geometrie der Ebene nur hinsichtlich solcher Eigenschaften gedeutet, welche bei der Gruppe der hier hingeschriebenen linearen Substitutionen ungeändert bleiben und da diese Substitutionen sich am einfachsten schreiben, wenn man in der üblichen Weise 3 homogene Veränderliche einführt, so ist es in der projektiven Geometrie der Ebene angezeigt, statt mit x und y gleich mit x_1, x_2, x_3 d. h. ternär zu operieren. "

Wir erkennen jetzt leicht, wie die entsprechenden Verhältnisse sich gestalten, wenn wir eine Geometrie auf den ringförmigen Flächen zweiten Grades konstruieren wollen. Die Flächen zweiten Grades können, wie wir sahen, durch ∞^6 Collineationen in sich übergeführt werden, in den λ und μ stellt sich dies durch die Formeln dar:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \; ; \; \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d} .$$

„ Auf der Fläche zweiten Grades finden daher die Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen $f(\lambda, \mu) = 0$ hinsichtlich aller derjenigen ihrer Eigenschaften eine projektiv geometrische Interpretation.

die ungeändert bleiben, wenn λ und μ jedes für sich unabhängig von dem anderen einer gebrochenen linearen Substitution unterworfen wird."

Hierdurch bekommt die Geometrie auf den Flächen 2ten Grades eine ganz andere Form als die der Ebene; es liegt dies eben daran, daß die Gruppe der Umänderungen beidemal eine ganz andere ist. Die obigen Substitutionen der λ und μ schreiben wir nun bequem in homogener Form so:

$$\varrho\,\lambda_1' = a\lambda_1 + \beta\lambda_2 \qquad \sigma\,\mu_1' = a\mu_1 + b\mu_2$$
$$\varrho\,\lambda_2' = \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 \quad \text{und} \quad \sigma\,\mu_2' = c\mu_1 + d\mu_2.$$

„Diesem Umstande wird nun eben dadurch am klarsten Rechnung getragen, daß man statt der Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ eine doppelt binäre Form $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$ setzt."

Die allgemeine Auffassung aber, um welche es sich handelt, wird sich vielleicht anschließend hieran mit den Worten bezeichnen lassen:

„Es giebt bei 2 veränderlichen so viel verschiedenartige Betrachtungsweisen der Gleichung $f(x, y)$ oder $f(\lambda, \mu) = 0$ und also so viele Arten von zweidimensionaler Geometrie, als es verschiedene geschlossene Gruppen giebt, die man

aus Transformationen der x und y zusammensetzen kann, und je nach der Art dieser Gruppe wird es zweckmäßig sein, bald die eine, bald die andere Art, sei es homogener sei es nicht homogener Variabler zu benutzen."

Litterarische Bemerkung. Eine zusammenhängende Theorie der doppelt binären Formen ist erst vor ca. 10 Jahren geschaffen worden: Capelli 1879. Giornale di Matematiche Bd. 17. Man wird dieser Arbeit, was die Entwickelung der Invariantentheorie angeht, unzweifelhaft eine große Bedeutung beilegen müßen; in der That kommen wir jetzt ohne die dort zum ersten Male gegebenen Ansätze gar nicht mehr zurecht. [Vgl. Referat von Nöther, Fortschr. der Mathem. Bd. 11. pag. 91-95.]

Wir wollen nun einige Einzelheiten der Geometrie auf den Flächen 2ten Grades betrachten. Es sei gegeben die algebraische Gleichung: $f(\lambda, \mu) = 0$; sie möge vom l^{ten} Grade in den λ und vom $m.^{ten}$ Grade in den μ sein. Welcher Art ist die hierdurch dargestellte Curve? Für λ = const. liefert die Gleichung m Werte von μ, für μ = const. entspr. l Werte von λ. Dies besagt: " Eine Erzeugende erster Art wird von der

Curve, algebraisch zu reden, in m Punkten geschnitten, eine Erzeugende zweiter Art wird von der Curve in l Punkten geschnitten."

Schneiden wir unsere Raumkurve durch eine Tangentialebene, so erhalten wir auf der einen Erzeugenden m Punkte, auf der anderen l Punkte.

„Die Zahl der Schnitte mit der Tangentialebene und damit die Ordnung der Curve ist also $l+m$."

Wir wollen die einfachsten Fälle solcher Curven auf den Flächen 2ten Grades einmal aufzählen:

Die Raumkurven erster Ordnung auf den Flächen 2ten Grades ($l+m=1$) sind natürlich die Erzeugenden der ersten oder der zweiten Art, je nachdem $l=1$ und $m=0$ oder $m=1$ und $l=0$ ist.

Setzen wir $l+m=2$, betrachten wir also eine Curve zweiter Ordnung auf der F_2, so haben wir die drei Fälle zu unterscheiden, daß:

$$l=2, \quad m=0$$
$$l=0, \quad n=2$$
$$l=1, \quad n=1 \text{ ist.}$$

Die ersten beiden Fälle ergeben eine quadratische Gleichung der λ resp. der μ allein, liefern daher nur 2 Erzeugende der ersten resp. der zweiten Art, also keine neuen Curven. Im dritten Falle dagegen bekommen wir einen ebenen Kegelschnitt.

„Ein ebener Schnitt der Fläche ist demnach dasselbe wie eine bilineare Gleichung zwischen den λ und μ."

In der That liefert die Gleichung

$0 = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4$ vermöge der Formeln pag. 132 direkt die Bilinearrelation:

$$0 = u_1 \lambda_1 \mu_1 + u_2 \lambda_2 \mu_2 - u_3 \lambda_2 \mu_2 + u_4 \lambda_1 \mu_2 .$$

Wir können dann ferner Curven dritter Ordnung in Betracht ziehen ($l + m = 3$). Hier haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden:

$l = 2,\ m = 1$ und

$l = 1,\ m = 2$. Mit diesen Raumkurven hat man sich ja sehr viel beschäftigt, sie nehmen im Raume fast dieselbe Stellung ein wie die Kegelschnitte in der Ebene. Näher hierauf einzugehen wird jedoch nicht möglich sein.

Wir wollen nun weitergehend uns fragen: Kann man auf den Flächen 2ten Grades eine Maassgeometrie konstruieren in analoger Weise, wie wir in der Ebene uns eine Maassgeometrie entworfen haben? Allgemein ist zu sagen:

„Die Geometrie im zweifach ausgedehnten Gebiete wird eine Maassgeometrie, wenn die zu Grunde gelegte Gruppe von Aenderungen erstens dreifach ist und zweitens für jedes Punktepaar des Gebietes eine

Invariante ergiebt, (die wir als Entfernung dieser beiden Punkte deuten werden.)

Die projektive Geometrie der Ebene hat nun bekanntlich eine Gruppe von achtfach ∞ vielen Collineationen. Wenn man daher von der projektiven Geometrie aus eine Maassgeometrie konstruieren will, so muss man jedenfalls so viel Collineationen ausscheiden, dass nur noch eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Collineationen bleibt.

„Ein Beispiel für unseren letzten Satz ist daher dieses, dass wir von der projektiven Geometrie der Ebene mit ihren 8fach ∞ vielen Collineationen zur Cayleyschen Maassbestimmung, d.h. zur Nicht-Euklidischen Geometrie, kommen, sobald wir einen Kegelschnitt festhalten. da es deren ∞⁵ giebt, geht jeder derselben noch durch dreifach ∞ viele Collineationen in sich über."

[Aus dieser Cayleyschen Maassgeometrie wurde dann die gewöhnliche Euklidische Geometrie, wenn der Kegelschnitt in ein Punktepaar und zwar spez. in das Paar imaginärer Kreispunkte ausartete.]

Wie liegen die Verhältnisse nun bei den Flächen zweiten Grades?

„Wir haben auf denselben zunächst auch mehr

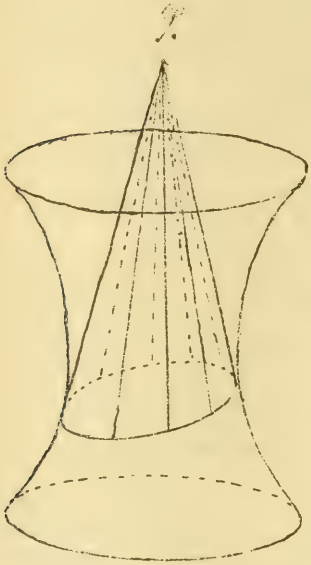
als dreifach ∞ viele, nämlich 6 fach ∞ viele Umänderungen in Betracht gezogen. Wollen wir eine Maassgeometrie auf den Flächen zweiten Grades haben, müssen wir vor allen Dingen wieder ein geometrisches Gebilde auf den Flächen zweiten Grades festhalten, so, dass nur noch 3 fach ∞ viele Transformationen zulässig bleiben."

Wir wählen als solches festbleibendes Gebilde die Curve zweiter Ordnung, welche durch eine beliebige Ebene ausgeschnitten wird, und betrachten dementsprechend nur diejenigen Collineationen der Fläche in sich, welche diese Ebene in sich überführen. Wir scheiden so in der That aus der Gesammtheit der 6 fach unendlich vielen Umformungen der Fläche 2ten Grades eine dreifach unendliche Gruppe aus, da es ja dreifach unendlich viele Ebenen des Raumes giebt.

Dass es wirklich eine zugehörige Maassgeometrie auf der Fläche giebt, und welcher Art dieselbe ist, sehen wir am besten durch folgende Betrachtungen:

Bei den in Rede stehenden Umformungen bleibt nicht nur die Schnittebene, sondern auch der Pol der Schnittebene fest und mit ihm der ganze Umhüllungskegel, den man vom Pol aus

nach dem Schnitte an die Fläche legen kann.



In Bezug auf diesen festbleibenden Kegel zweiter Ordnung können wir dann aber für die vom Pol auslaufenden Strahlen in bekannter Weise eine Cayleysche Maassbestimmung gründen: „Unsere dreifach unendlich vielen Collineationen des Raumes ergeben für die vom Pol auslaufenden Strahlen gerade diejenigen Bewegungen, bei denen die nicht-Euklidischen Winkel erhalten bleiben, welche diese Strahlen bezüglich des vom Pol auslaufenden Umhüllungskegel mit einander einschließen."

„Wir werden nun eine nicht-Euklidische Maassbestimmung auf einer Fläche 2ten Grades haben, für welche unsere ∞^3 Collineationen die Bewegungen abgeben, wenn wir als Entfernung zweier Flächenpunkte einfach den nicht-Euklidischen Winkel wählen, unter welchen diese Flächenpunkte vom Pol aus gesehen werden,

insbesondere also als Länge eines Bogenelementes auf der Fläche zweiten Grades den ∞ kleinen Winkel betrachten, den die bezüglichen Projektionsstrahlen mit einander bilden."

Die läßt sich nun alles analytisch ausführen, wir wollen nur die Resultate mitteilen. Dieselben stützen sich auf die Definition des Winkels zweier Strahlen eines Bündels, die wir im vorigen Semester gegeben haben: $i \cdot k' \cdot \log.(DV)$, wo DV das Doppelverhältnis dieser Strahlen mit den beiden Schnittstrahlen ihrer Ebene und des absoluten Kegels bezeichnet. (cfs. die Wintervorlesung.). Es wird hiernach der Abstand M zweier Punkte auf der Fläche zweiten Grades mit den Punkten $\lambda\ u$ und λ', u':

$$M = 2k' \arcsin \sqrt{\frac{(\lambda\lambda')(a_{ik}u_i u_k')(u_1 u_3 + u_2 u_4)}{(u_1\lambda_1 a_{11}u_1' + u_2\lambda_2 a_{22}u_1 - u_3\lambda_2 a_{22}u_2' + u_4\lambda_1 a_{11}u_2)(u_1\lambda_1' a_{11}u_1' + \dots)}}$$

(wo k' eine beliebige Constante und $u_y = 0$ die Schnittebene, $u_1 u_3 + u_2 u_4 = 0$ aber die Bedingung ist, unter welcher die Ebene die Fläche berührt.) Insbesondere ergiebt sich hieraus (für zwei unendlich benachbarte Punkte) das Bogenelement ds, wenn man $\lambda' = \lambda + d\lambda$ und $u' = u + du$ setzt.

$$ds = 2k' \frac{\sqrt{(\lambda d\lambda)(u\,du)(u_1 u_3 + u_2 u_4)}}{(u_1\lambda_1 u_1' + \dots)}$$

Wir knüpfen hieran folgende Bemerkungen:

1.) Die Punkte unseres ebenen Schnittes sind unendlich weit; denn für sie werden die Factoren im Nenner:

$$u_1 \lambda_1 \mu_1 + u_2 \lambda_2' \mu_1' - u_3 \lambda_2 \mu_2 + u_4 \lambda_1 \mu_2 = 0. \text{ und}$$
$$u_1 \lambda_1' \mu_1' + u_2 \lambda_2' \mu_1' - u_3 \lambda_2' \mu_2' + u_4 \lambda_1' \mu_2' = 0.$$

2.) Die Erzeugenden unserer Fläche zweiten Grades haben die Länge 0. Denn wenn $\lambda = \lambda'$ oder aber $\mu = \mu'$, was ja besagt, daß beide Punkte auf derselben Erzeugenden liegen, so verschwindet ein Factor im Zähler.

3.) Wenn wir eine Tangentialebene festgehalten haben, so daß also $u_1 u_3 + u_2 u_4 = 0$ ist, dann wird M zunächst identisch 0 und erst durch einen zweckmässigen Grenzübergang kann man ein von 0 verschiedenes M definieren. (Man läßt zu dem Zwecke das $k' \infty$ werden, der Art, daß es multipliciert mit dem unendlich kleinen Bogen oder sin. Endliches ergiebt.

Es wird dann:

$$M = 2c'. \sqrt{\frac{(\lambda\lambda')(u u')}{(u_1 \lambda_1 \mu_1 + \cdots)(u_1 \lambda_1' \mu_1' + \cdots)}} \text{ werden.}$$

4.) Im allgemeinen hat diese Maassbestimmung auf der Fläche 2ten Grades selbstverständlich nicht =

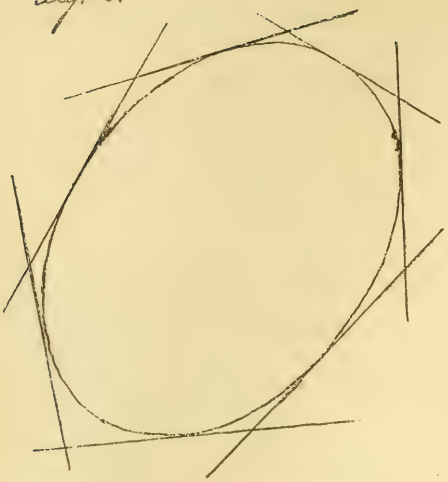
Euklidischen Charakter, im Grenzfall wird es eine Euklidische Maassbestimmung sein.

Wir haben bei diesen Bemerkungen nur erst einen allgemein-algebraischen Standpunkt eingenommen.

Wenn wir jedoch auf die Realitätsverhältnisse Rücksicht nehmen wollen, so werden wir sehen, dass sich dieselben für die ringförmigen Flächen freilich so verschieden wie möglich von denjenigen gestalten, die wir in der elementaren Geometrie der Ebene haben, indem alles das imaginär wird, was in der gewöhnlichen Geometrie reell ist und umgekehrt.

Es findet dies seinen Grund darin, dass es sich, wenn wir vom Pol auf die Polarebene projicieren, in letzterer zwar um die hyperbolische Geometrie bezüglich des einteiligen Schnittkegelschnittes handelt, wohlverstanden aber in demjenigen Teil der Ebene, der ausserhalb dieses Kegelschnittes liegt. Das a. angebene ds^2 ist dementsprechend eine indefinite quadratische Form der $d\lambda, d\mu$, die Linien ohne Länge sind reell, etc. etc. Wir haben gleichwohl diese Maassgeometrie auf den ringförmigen Flächen zweiten Grades entwickelt, um den Contrast mit den analogen Beziehungen bei den

Fig. 18.



ovalen Flächen hervorbringen zu lassen, bei denen sich alles aufs schönste unseren gewöhnlichen Anschauungen entsprechend gestaltet.

Wir wollen noch einige allgemeine Bemerkungen über die ringförmigen Flächen anschließen.

Alle Bogenelemente der verschiedenen für dieselbe Fläche geltenden Maassbestimmungen sind in der Form enthalten: $ds^2 = 2 \cdot F \cdot d\lambda\, d\mu$, wobei freilich der Factor F je nach dem bei der Maassbestimmung zu Grunde gelegten ebenen Schnitt verschieden ist. Nach der gewöhnlichen Formel würde man ein Bogenelement:

$$ds^2 = E\,d\lambda^2 + 2F\,d\lambda\,d\mu + G\,d\mu^2$$ erwarten.

Es ist daher hier $E = G = 0$ zu setzen, dies besagt nichts anderes, als daß die Linien $\lambda = \text{const.}$ und $\mu = \text{const.}$ die Linien ohne Länge sind, wie wir schon wissen. Wenn wir nun den Winkel berechnen, unter dem sich 2 Curven auf der Fläche schneiden, so finden wir, daß derselbe von dem F, worin gerade die verschiedenen Maassbestimmungen

sich unterscheiden, unabhängig wird. Es ist allgemein:

$$\cos.\varphi = \frac{E\,d\lambda\,\delta\lambda + i\,F(d\lambda\,\delta\mu + \delta\lambda\,\delta\mu) + G\,d\mu\,\delta\mu}{\sqrt{(E\,d\lambda^2 + 2F\,d\lambda\,d\mu + G\,d\mu^2)\cdot(E\,\delta\lambda^2 + 2F\,\delta\lambda\,\delta\mu + G\,\delta\mu^2)}}.$$

Setzen wir hierin $E = G = 0$, so hebt sich F heraus, und es bleibt:

$$\cos.\varphi = \frac{d\lambda\,\delta\mu + \delta\lambda\cdot d\mu}{\sqrt{d\lambda\,d\mu\,\delta\lambda\,\delta\mu}}.$$ Geometrisch ausgesprochen

heißt dies:

„Alle unsere Maaßbestimmungen ergeben für den Winkel zweier Fortschreitungsrichtungen auf unserer Fläche je denselben Betrag, nämlich $\frac{i}{e}$ Lg. desjenigen Doppelverhältnisses, welches die beiden Fortschreitungsrichtungen mit den durch ihren Schnittpunkt hindurchlaufenden geradlinigen Erzeugenden der Fläche bilden."

oder anders ausgedrückt:

„Alle von uns auf der Fläche construierten Maaßbestimmungen sind zu einander conform."

Wir erkennen hieraus zugleich:

„Wenn es auch wahr ist, daß wir auf den Flächen 2ten Grades ohne Festhaltung eines ebenen Schnittes noch keine Maassgeometrie haben, so können wir doch von vornherein auf den Flächen 2ten Grades von dem Winkel sprechen, welchen 2 Fortschreitungsrichtungen mit einander bilden."

Ovale Flächen 2. Grades.

Wenden wir uns nun zu den ovalen Flächen zweiten Grades. Ich möchte hier zunächst einige Citate über eigene frühere Arbeiten geben, die in den Jahren 1872-75 entstanden sind, in ihnen habe ich mich bestrebt, die Funktionentheorie in möglichst lebendige Beziehung zur projektiven Geometrie zu setzen. Es ist hier zu erwähnen:

das Erlanger Programm vom Jahre 1872 (Note N°=78),
Erlanger Berichte 1873: „Note über den Pascal'schen Satz."

Ich habe hierin eine Uebertragung des Pascalschen Satzes auf die Raumgeometrie gegeben, die im wesentlichen darauf beruht, anstatt reelle Werte von λ auf dem Kegelschnitt, die komplexen Größen $x+iy$ auf der Kugel zu deuten. Diese Arbeit findet sich wieder abgedruckt in den Mathem. Annalen Bd. 22. (1883).

Ferner ist zu nennen:

Mathem. Annalen Bd. 9. (1875): „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich."

In Verbindung damit erwähne ich die Dissertation von Wedekind,*) die im Auszuge in den Annalen. Bd. 9. (1875.) mitgeteilt ist: „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen."

*) Erlangen. 1874.

Ich werde bald auf die vors gegebene Definition des Doppelverhältnisses von 4 Punkten auf der Kugel zurückkommen.

Wir wollen unseren Betrachtungen zunächst eine Kugel zu Grunde gelegt denken, die durch die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{gegeben sei.}$$

Wir setzen, wie bereits früher

$\lambda = \frac{x+iy}{1-z}$, wo λ der Parameter der Erzeugenden erster Art ist. Was den Parameter μ der Erzeugenden zweiter Art angeht, so schreiben wir:

$\mu = \frac{x-iy}{1-z}$. Wir könnten auch den reciproken Wert wählen, doch ziehen wir die hier gegebene Definition von μ vor, da sie uns den Satz liefert:

"Die beiden imaginären Erzeugenden erster und zweiter Art, die durch denselben reellen Punkt der Kugel laufen, haben konjugiert imaginäre Parameterwerte λ und μ".

Nun betrachten wir gleich die Collineationen:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}; \qquad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}.$$

Wollen wir nun reelle Collineationen des Raumes haben, so müssen wir offenbar die λ und μ

conjugirt imaginären Substitutionen unterworfen, was aber doch 6fach ∞ viele reelle Collineationen giebt, da von den 4 Verhältnissgrössen $\alpha\beta\gamma\delta$, nachdem wir eine derselben gleich 1 gesetzt haben die anderen drei beliebige komplexe, also 2=teilige Werte annehmen können."

„Bei dieser Beschränkung auf das Reelle kommen natürlich die einfachen Collineationen, die wir Schiebungen nannten, jetzt, bei den ovalen Flächen in Wegfall."

Wir bezeichnen die reellen Collineationen weiterhin mit:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}\,;\quad \mu' = \frac{\bar\alpha\mu+\bar\beta}{\bar\gamma\mu+\bar\delta}\,,$$

wo die $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma, \bar\delta$ die zu den $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ conjugirt complexen Grössen sein mögen. Diese Collineationen der ovalen Flächen in sich werden nun geometrisch für uns die grösste Bedeutung haben. Wir werden nämlich eine nicht-Euklidische Maassbestimmung des Raumes auf die ovalen Flächen gründen, und jene ∞^6 reellen Transformationen sind dann die Bewegungen des Raumes in dieser so definierten nicht-Euklidischen Geometrie. Diese nicht-Euklidische Geometrie, welche sich auf eine Ovalfläche gründet, bei welcher wir dann die Punkte des Inneren hauptsächlich betrachten nennen

wir in Uebereinstimmung mit dem Wintersemester hyperbolisch, da jede Gerade im Inneren 2 ∞ ferne Punkte bekommt. Die andere Geometrie hingegen, welche mit den nullteiligen Flächen 2ten Grades arbeitet, nennen wir elliptisch und die dritte, welche sich auf eine ringförmige Fläche zweiten Grades stützt, lassen wir ohne Benennung weil das ihr zugehörige Quadrat des Bogenelementes eine indefinite quadratische Form der Differentiale der Coordinaten ist.

Im vorliegenden Falle, wo wir es mit den ovalen Flächen zu thun haben ist dann jeder Bewegung im hyperbolischen Raume eine solche Substitution der λ und μ, wie oben angegeben, zugeordnet und umgekehrt. Es ergiebt sich daher hierbei eine eindeutige Beziehung der Bewegung der hyperbolischen Maaßgeometrie auf die allgemeine, d. h. mit complexen Veränderlichen ausgestattete, lineare Substitution einer Veränderlichen λ.

Diese Beziehungen haben nun funktionentheoretisch eine große Tragweite; es wird dies sofort hervortreten, wenn wir dazu übergehen, das Programm weiter fortzuführen, das wir im vorigen Wintersemester aufstellten, in Betreff solcher eindeutiger Funktionen die durch lineare Substitutionen in sich übergehen, d. h. der automorphen Funktionen (v. die Wintervorlesung, wie auch Math. Annalen IX, p. 185).

Für diese Funktionen gilt, wie wir wissen:

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\alpha_k \lambda + \beta_k}{\gamma_k \lambda + \delta_k}\right), \quad \text{für } k = 0, 1, 2 \ldots, \text{ wo}$$

die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im allgemeinen hier in Frage kommenden Falle complexe Größen darstellen. Um das Wesen dieser Substitutionen sich klar zu machen, wird dann die nicht-Euklidische Geometrie des hyperbolischen Raumes von großem Nutzen sein, indem diese uns einmal gestattet, jene Substitutionen als Verschiebungen und Drehungen des Raumes zu deuten, weiter aber auch uns gewisse Ausdrücke wie Winkel, Abstand etc., zu benutzen an die Hand giebt.

Wir werden bald auf diese Gedanken zurückzukommen haben; wir wollen jedoch zunächst in unseren geometrischen Betrachtungen fortfahren.

Zunächst eine sehr selbstverständliche Bemerkung!

Jede solche Formelgruppe:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{oder auch:}$$

$$\begin{aligned}
\varrho\, x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 \\
\varrho\, x_2' &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4 \\
\varrho\, x_3' &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4 \\
\varrho\, x_4' &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4
\end{aligned}$$

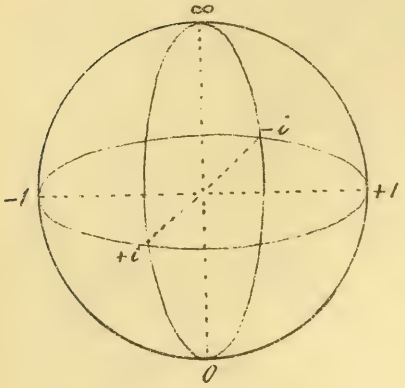
kann in doppelter Weise gedeutet werden, einmal

indem man das Coordinatensystem festhält dagegen eine Umformung des Raumes annimmt. —

In diesem Falle ordnet man jedem Punkte des Raumes einen anderen Punkt desselben zu — oder aber indem man den Raum mit seinen Punkten festhält, dagegen sich das Coordinatensystem umformen läßt. Jeder Punkt des Raumes alsdann, der jetzt die Coordinaten x' hat, hatte nach dieser zweiten Auffassung vorher die Coordinaten x. Dieser doppelten Auffassung werden wir gerecht, indem wir die Coordinaten eines Raumpunktes als eine relative Beziehung desselben zu dem Coordinatensystem bezeichnen.

Schließen wir uns nun einmal dieser letzteren Auffassung an. Wir hatten bisher auf der Kugel λ in ganz bestimmter Weise gedeutet. Es war für den Nordpol $\lambda = \infty$, für den Südpol $\lambda = 0$, durch beide Punkte lief ein Meridian der reellen Zahlen, dessen Schnitt mit dem Aequator dann die Punkte ± 1 lieferte. Dagegen dem Meridian der reellen Zahlen senkrechte Meridian stellte die rein imaginären Zahlen dar, dessen Schnitt mit dem Aequator ergab die Punkte $\pm i$. Wenn wir dann durch unsere Substitutionsformeln ein neues Coordinatensystem einführen, so werden wir die Punkte $0, 1, \infty$ in ganz

Fig. 19.



beliebige Stellen auf der Kugel bringen können.

„Beim allgemeinen Coordinatensystem liegen daher die Punkte 0 1 ∞ an drei beliebigen Stellen der Kugel. Dadurch ist das System aber auch festgelegt."

Nun ist die Frage, wie konstruieren wir von den drei Punkten 0 1 ∞ in beliebiger Lage ausgehend die zu den übrigen Kugelpunkten gehörigen Coordinatenwerte *)? Wir sagen zunächst folgendermaßen: Weil es sich bei der linearen Substitution $\lambda = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$; $\mu' = \frac{\bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\mu + \bar{\delta}}$ doch schließlich um eine Collineation handelt, bei welcher unsere Kugel in sich übergeführt wird, so wird die Ebene des Meridians der reellen Zahlen in eine neue Ebene übergehen, der Meridian selbst in den Schnitt dieser Ebene mit einer Kugel, d. h. in einen Kreis übergehen.

---

*) Wir könnten die ganze Frage von der Kugel natürlich auch auf eine beliebige andere ovale Fläche übertragen, was wir im Texte der Kürze halber unberührt lassen.

Im neuen Coordinatensysteme werden daher die Punkte mit reellen Coordinaten auf demjenigen Kreise zu liegen haben, der durch die Punkte 0 ∞ 1 hindurchgeht.

Da nun diese Kreislinie mit dem ursprünglichen Meridian der reellen Zahlen reell projektiv ist, so werden wir in der Weise des Würfelwurfes die ganze Wertverteilung der reellen Zahlen längs der Kreislinie konstruieren können, indem wir von den einmal gewählten 0 1 ∞ ausgehend immer wieder den 4ten harmonischen Punkt konstruieren. So finden wir zunächst den Punkt −1 als den harmonischen Punkt zu 0 1 ∞ u. s. fort.

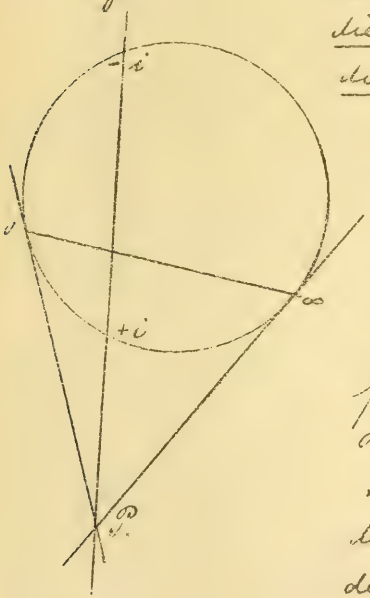
Hierbei ergiebt sich nun ein bestimmter Punkt des Raumes, der dem Mittelpunkt der ersten Kugel entspricht.

Wir erhalten ihn einfach als Schnittpunkt der Verbindungslinien von −1 mit +1 und von 0 mit ∞ und nennen ihn das „Centrum des neuen Coordinatensystems." Wir erkennen zugleich:

„Centrum eines neuen Coordinatensystems auf der Kugel kann jeder Punkt des Kugelinnern sein und der zugehörige Kreis der reellen Zahlen durch jede durchs Centrum hindurchgehende Ebene ausgeschnitten werden."

Wenn Centrum und Ebene des Kreises der reellen Zahlen beliebig angenommen ist, so kann man ausserdem noch etwa den Punkt 0 auf der Peripherie des betreffenden Kreises beliebig wählen, im übrigen ist dann das Coordinatensystem bestimmt. Um z. B. die Punkte $\pm i$ zu finden, sucht man den Pol der Ebene der reellen Zahlen und verbindet ihn mit dem Centrum.

Fig. 20.



Die Punkte $\pm i$ erscheinen dann als die Schnitte unserer Kugel mit dieser Verbindungslinie.

Noch genauer können wir die Lage der complexen Werte auf der Kugel studieren, wenn wir uns vertraut machen mit der Bedeutung des „Doppelverhältnisses" für vier beliebige Punkte der Kugel. Haben diese 4 Punkte die Coordinaten a, b, c, d, so verstehen wir doch als Doppelverhältnis derselben den Ausdruck:

$D^{\circ}V. = \frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$. Dieses $D^{\circ}V.$ ist ganz unabhängig von der speciellen Wahl des Coordinatensystems. Fragen wir uns jedoch, wie wir das Doppelverhältnis $\frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$ von 4 Punkten der

Kugel am einfachsten nun auch projektivisch definieren können?

„Diese Frage nach der Bedeutung des Doppelverhältnisses von 4 Punkten ist für uns von früher her nur für den Fall vorweg erledigt, wo das Doppelverhältnis reell wird, indem die 4 Punkte einem und demselben Kugelkreise angehören."

Es handelt sich da nämlich um das Doppelverhältnis von 4 Punkten eines Kreises, wie es ihnen in der gewöhnlichen synthetischen Geometrie beigelegt wird. *); wir ziehen bekanntlich, um dasselbe zu berechnen, von irgend einem Punkte des Kreises aus 4 Strahlen nach jenen Punkten, deren Doppelverhältnis uns das Doppelverhältnis der 4 Punkte liefert. Die Frage nach dem Doppelverhältnis von 4 beliebigen Punkten ist nun gerade die Aufgabe, die Wiederkind in seiner (pag. 146 erwähnten) Dissertation behandelt hat. Wir werden bald näher hierauf einzugehen haben. Vorerst wollen wir noch bemerken, um die Betrachtung von pag. 157. abzuschließen:

*) Denn wir können den Kreis zum Kreis der reellen Zahlen unseres Coordinatensystems machen worauf wir auf ihm dasselbe Gesetz der Werteverteilung von z haben, wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie, die nur reelle Werte des Parameters z kennt.

Wenn wir als die Punkte a, b, c die Punkte 0, ∞, 1 wählen, außerdem d = λ setzen, so wird das Doppelverhältnis der 4 Punkte D V = λ werden.

„Kennen wir daher die Definition des komplexen Doppelverhältnisses, so werden wir die Coordinaten λ, welche irgend ein Kugelpunkt d in irgend einem unserer Coordinatensysteme bekommt, als das Doppelverhältnis definieren können, welches dieser Punkt d mit den 3 Coordinatengrundpunkten 0 ∞ 1 bildet."

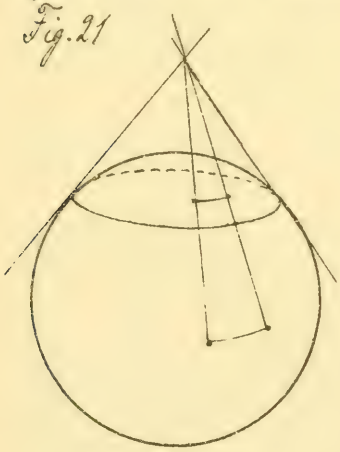
Ehe wir nun auf die Definition des komplexen Doppelverhältnisses eingehen, wollen wir auf die Kugel übertragen, was wir über die „nicht-Euklidische Geometrie" auf den ringförmigen Flächen 2ten Grades in der vorigen Vorlesung gesagt hatten. Jene Betrachtungen haben offenbar allgemeine Bedeutung. Um auf einer Fläche 2ten Grades eine Maassbestimmung festzulegen, müssen wir, wie wir sahen, die 6fach ∞ vielen Collineationen der Fläche in sich beschränken dadurch, daß wir einen Punkt festhalten, der im Allgemeinen nicht auf der Fläche gelegen sein wird. Dann stimmt die Maassgeometrie auf der Fläche überein mit der Maassgeometrie „in" diesem Punkte, indem man als Fundamentalkegel den von diesem Punkte an die Fläche 2ten Grades zu legenden Kegel annimmt. Bei den ovalen Flächen, als deren

Typus wir die Kugel wählten, haben wir dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1.) Wenn der festgehaltene Punkt ausserhalb der Kugel liegt und daher seine Polarebene die Kugel in einem einteiligen Kreise schneidet, so haben wir es mit der hyperbolischen Maassbestimmung in jenem Punkte zu thun, die wir dann einfach durch Projektion auf die Kugel übertragen.

Als Entfernung zweier Punkte der Kugel definieren wir also den nicht-Euklidischen Winkel, unter dem jene Punkte von dem festgehaltenen Punkte aus gesehen werden, etc.. Man hat dann jedoch noch die Wahl, ob man auf der einen oder der anderen Kugelkalotte operieren will. Die kürzesten Linien auf der Kugel werden selbstverständlich von denjenigen Kreisen gebildet, deren Ebenen durch unseren Pol hindurchgehen.

Fig. 21



2.) Halten wir dagegen einen Punkt im Innern der Kugel fest, so hat zwar auch dieser eine reelle Polarebene, der Schnittkreis aber und damit der Fundamentalkegel sind imaginär. Wir haben es

daher mit der elliptischen Geometrie des Strahlenbündels zu thun, die sich aber nicht etwa eindeutig auf 2 getrennte Kalotten der Kugel, sondern zweideutig auf die Gesammtkugel überträgt. Kürzeste Linien sind jetzt wieder diejenigen Kreise, deren Ebenen durch den Pol hindurchgehen.

3.) Den Uebergangsfall bildet die parabolische Maassgeometrie auf der Kugel, welche sich ergiebt, wenn der festgehaltene Punkt auf der Kugel selbst liegt. Dieser Fall wird sich durch einen Grenzübergang aus dem vorigen erledigen.

Figur 22.

„Diese dreierlei Maassbestimmungen auf der Kugel sind uns in specieller Form schon im Wintersemester begegnet." *)

ad.1. Während nämlich im allgemeinen Falle der hyperbolischen Maassbestimmung auf der Kugel der festbleibende Punkt beliebig ausserhalb der Kugel angenommen wird, war das Beispiel der hyperbolischen Maassbestimmung, welches wir damals hatten, dadurch specialisiert, daß wir als festbleibende Ebene die Aequatorebene nahmen und

*) v. die Windervorlesung.

also als festbleibenden Punkt einen ∞ weiten Punkt des Raumes. In der That hatten wir damals die Maassbestimmung auf der Kugel gewonnen, indem wir dieselbe durch orthographische Projektion auf die Aequatorebene oder auf eine Parallelebene zu ihr bezogen. (v. Fig. 23.).

ad. 2. Ein Beispiel der elliptischen Maassbestimmung entstand, indem wir statt eines beliebigen Punktes des Kugelinnern den Mittelpunkt der Kugel festhielten, worauf eben die elementare sphaerische Maassgeometrie beruht. Die feste Polarebene ist dann die ∞ ferne Ebene des Raumes. (v. Fig. 24.).

ad. 3. Bezüglich der parabolischen Maassbestimmung war derjenige Fall bevorzugt, bei welchem der festbleibende Kugelpunkt auf der Kugel der höchst gelegene ist.

Wir hatten die Kugel damals durch stereographische Projektion auf die mit parabolischer Maassbestimmung ausgestattete Aequatorebene oder eine Parallelebene zu ihr bezogen und so die parabolische Maassbestimmung auf der Kugel gewonnen. (v. Fig. 25.).

Indem wir die Kugel auf gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten bezogen, hatten wir für die

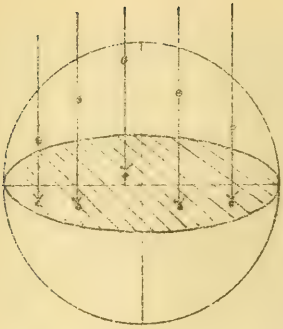


Fig. 23

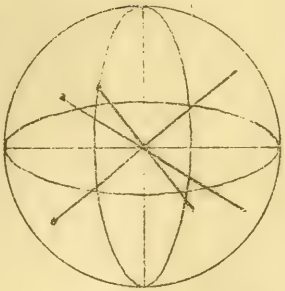


Fig. 24.

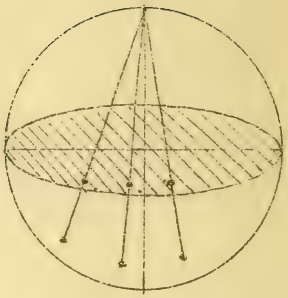


Fig. 25.

Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3, Ausdrücke erhalten, an die wir uns doch auch erinnern wollen.

Die Gleichung der Kugel sei $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Dann ist:

1./ bei der <u>hyperbolischen</u> Maassbestimmung des Wintersemesters:

$$ds_1 = \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{\zeta},$$

2./ bei der <u>elliptischen</u> Maassbestimmung:

$$ds_2 = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

3./ bei der <u>parabolischen</u> Maassbestimmung:

$$ds_3 = \frac{2\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{1 - \zeta}$$

Setzen wir jetzt nach pag 143:

$\lambda = \frac{\xi + i\eta}{1-\xi}$; $\mu = \frac{\xi - i\eta}{1-\xi}$, so wird unter Berücksichtigung von

$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ umgekehrt:

$$\xi = \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda\mu}\,;\quad \eta = \frac{\lambda-\mu}{(1+\lambda\mu)\,i}\,;\quad \zeta = \frac{\lambda\mu - 1}{1+\lambda\mu}$$ und unsere Formeln

gehen bei dieser Substitution über in

$$ds_1 = \frac{2\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}}{\lambda\mu - 1} \qquad ds_2 = \frac{2\cdot\sqrt{d\lambda\cdot d\mu}}{\lambda\mu + 1}$$

$ds_3 = 2\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}$, wo $\sqrt{d\lambda\cdot d\mu}$ immer durch eine bilineare Verbindung der λ, μ dividiert ist.

Wir erkennen hieraus:

„Wenn man die Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3 des Wintersemesters durch λ und μ ausdrückt, so entstehen in der That Formeln, welche Specialfälle derjenigen sind, die wir in der vorigen Stunde für die nicht-Euklidische Geometrie auf einer Fläche 2ten Grades aufgestellt haben."

Berücksichtigen wir dann die Entwicklungen auf pag. 148 ff.; so ergiebt sich weiter:

„Diese Formeln für ds_1, ds_2, ds_3 lassen sich für unseren allgemeinen Fall verwenden, wenn wir uns nur die Coordinaten $\lambda\mu$ jedesmal in passender Weise eingeführt denken."

Was haben nun alle diese Maassbestimmungen auf der Kugel gemeinsam? Da, in allen dreien"

berechnet sich offenbar der Winkel, welchen zwei Fortschreitungsrichtungen mit einander bilden, gleich, und zwar wird gemäss unserer früheren Formel:

$$\cos.\varphi = \frac{d\lambda\cdot\delta\mu + \delta\lambda\, d\mu}{\sqrt{d\lambda\cdot\delta\mu}\cdot\sqrt{\delta\lambda\, d\mu}}.$$

„Alle unsere Maassbestimmungen sind also conform."

„Wir können den Winkel, welche zwei Fortschreitungsrichtungen δ und d einschliessen, auch noch definieren, dass wir sagen: $\varphi = \frac{i}{2}\cdot\log. DV$, wo DV das Doppelverhältnis ist, welches die Fortschreitungsrichtungen d und δ mit den beiden imaginären Geraden bilden, die auf der Kugel durch den betreffenden Punkt hindurchlaufen."

Diese Winkelbestimmung auf der Kugel ist alsdann die gewöhnliche der Euklidischen Geometrie, da ja in den betrachteten Maassbestimmungen auch die gewöhnliche Sphaerik eingeschlossen ist. *). —

*) Wollen wir doch noch besonders hervorheben, dass zwei conjugierte Ebenen, d.h. zwei Ebenen, von denen die eine durch den Pol der anderen geht, sich auf der Kugel rechtwinklig schneiden. Daher schneiden beispielsweise (p. 153) die sämmtlichen kürzesten Linien einer hyperbolischen Maassbestimmung auf der Kugel den zugehörigen Grenzkreis rechtwinklig.

Nach diesem Exkurs kehren wir zur Wedekindschen Frage der Definition des Doppelverhältnisses für 4 Punkte der Kugel zurück.

Wenn wir 4 Punkte auf der Kugel haben und uns fragen, welche geometrischen Beziehungen derselben zu einander besonders dem Messen zugänglich sind, so werden dies offenbar nicht die Entfernungen der Punkte von einander sein, da diese ja bei hyperbolischer Maassbestimmung des Raumes ∞ werden, wohl aber bietet sich als besonders zweckmäßig die Winkelbestimmung auf der Kugel dar. Legen wir nämlich durch je drei der vier Punkte einen Kreis, so werden die Winkel welche die entstehenden 4 Kreise A, B, C, D. *) an jenen Punkten mit einander bilden, unveränderliche Elemente der Figur sein. Wenn wir die 4 Punkte durch Collineation beliebig auf der Kugel verschieben, so bleiben die Winkel jener Kreise stets dieselben. Man kommt daher auf den Gedanken, diese Eigenschaft der Winkel zur Definition des Doppelverhältnisses der 4 Punkte a, b, c, d zu benutzen. Die Ausführung dieses Gedankens ist der wesentliche Inhalt der Wedekindschen Abhandlung. Vgl. Math. Ann. 9. pag. 211. Dort giebt Wedekind schließlich für unser Doppelverhältnis $\frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$ folgende Bedeutung:

*) Hierbei bezeichnet A den Kreis, der den Punkt a nicht enthält, entspr. B, C, D.

Es ist zunächst eine bestimmte Richtung festzulegen, in der jeder Kreis durchlaufen wird. Mit $\sin(\measuredangle C)_d$ bezeichnet Wedekind dann denjenigen Winkel, welcher die um den Punkt d nötige Drehung misst, um die positive Richtung des Kreises A in die positive Richtung des Kreises C überzuführen. Das D.V. der 4 Punkte wird dann

$$= \frac{\sin.(\measuredangle B)_d}{\sin.(\measuredangle C)_d} \cdot l^{+i(\measuredangle B)_d}.$$

Dieser Wedekindsche Ausdruck für das Doppelverhältnis versagt leicht in dem gewöhnlich interessierenden Falle, wo die 4 Punkte in einer Ebene liegen. Alsdann fallen die 4 Kreise zusammen, alle in Betracht kommenden Winkel werden gleich 0. Jener Ausdruck nimmt daher die Gestalt an $\frac{0}{0}$, kann aber dann durch Grenzübergang in die gewöhnliche Form der synthetischen Geometrie übergeführt werden. (Näheres v. in der genannten Abhandlung.)

Wir wollen übrigens noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass die so gegebene Definition des D.V. ganz allgemein gilt, unabhängig von der spec. Massgeometrie, in welcher wir auf der Kug. unsere Winkel messen.

Wir wollen heute die reelle Geometrie auf der reellen Kugel (die wir ein für allemal als Typus

der Ovalflächen nähmen) behandeln, wobei wir unsere Entwickelungen auf die jedesmalige „Gruppe" gründen, die wir den Kreisverwandtschaften zu Grunde legen. Ein kurzer Ueberblick zeigt uns, daß wir vier Gruppen kennen, die wir in Betracht ziehen können.

a.) Die allgemeinste Gruppe, welche die übrigen drei umfaßt, ist gegeben durch die Substitution (v. pag. 144):

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \quad \mu' = \frac{\bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\mu + \bar{\delta}},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige komplexe Werte annehmen können. Es gaben uns diese Formeln, wie wir wissen, die Gesammtheit der reellen Collineationen des Raumes, die unsere Kugel in sich überführen. [Projektive Geometrie auf der Kugel.]

b.) Wir betrachten ferner nur diejenigen Substitutionen, bei denen ein bestimmter Punkt ausserhalb der Kugel festgehalten wird. Dies liefert uns bekanntlich die hyperbolische Maaßbestimmung auf der Kugel; die Kugel selbst spaltet sich in zwei Kalotten durch den Berührungskreis des von dem festen Punkte an die Kugel gelegten Kegels.

c.) Wird ein Punkt auf der Kugel festgehalten, so haben wir die parabolische Maaßbestimmung auf der Kugel.

d.) Liegt endlich der festgehaltene Punkt im Innern der Kugel, so liegt der Fall der elliptischen Maaßbestimmung

vor, worin auch die gewöhnliche Sphaerik gehört.

Diese vier Arten der Geometrie auf der Kugel wollen wir nun im einzelnen besprechen.

Fragen wir uns vorab, wie muß eine Gleichung: $f(\lambda, \mu) = 0$ beschaffen sein, damit sie eine reelle Curve vorstellt, d.h. eine Curve, die in gewöhnlichen Coordinaten geschrieben reelle Coefficienten ergiebt? (Es ist also nicht nötig, daß die Curve einen reellen Linienzug darstellt.) Erinnern wir uns an die Formeln, welche den Zusammenhang von λ und μ mit den Coordinaten x, y, z ergeben (pag. 143), so ergiebt sich leicht:

„Reelle Curven werden im Coordinatensystem durch solche Gleichungen vorgestellt, welche ungeändert bleiben, wenn ich innerhalb der Coefficienten $+i$ mit $-i$ vertausche und dann noch λ mit μ umwechsele."

Eine reelle bilineare Gleichung z.B. muß hiernach die Form haben:

$A \cdot \lambda\mu + (B + iC)\lambda + (B - iC)\mu + D = 0$. Diese Gleichung stellt also einen reellen ebenen Schnitt der Kugel dar, d.h. den Schnitt mit einer reellen Ebene, was dieser nun einteilig oder mehrteilig sein.

Algebraisch werden uns wieder die linken Seiten der Gleichungen interessieren, nachdem wir vielleicht homogen gemacht haben, wir können diese charakterisieren als „doppelt binäre Formen

mit konjugierten Coefficienten."

Betrachten wir nun insbesondere die Geometrie
ad a.

Ad. a.) Wir haben dann eine solche Form
$f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ zu untersuchen gegenüber der
Gruppe der Substitutionen:

$$\lambda_1' = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \; ; \; \mu_1' = \bar{\alpha}\mu_1 + \bar{\beta}\mu_2 .$$

$$\lambda_2' = \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 \; ; \; \mu_2' = \bar{\gamma}\mu_1 + \bar{\delta}\mu_2 .$$

Besonders wird verlangt, die Invarianten einer
solchen Form f gegenüber diesen Substitutionen zu
erforschen. Fragt man, was bisher über diese Invari-
antentheorie gearbeitet wurde, so ist zu sagen: Von
seiten der Algebristen *) ist gar nichts, seitens der
Zahlentheoretiker wenig hierüber geschrieben. Unter
den letzteren ist zu nennen:

Hermite, sur la théorie des formes quadra-
tiques. Crelle Bd. 47.

Picard, Acta mathematica Bd. 1, 2 u. 5.

Diese wenigen Citate mögen hier genügen.
Wir können übrigens diese ganze Invarianten-
theorie auch in der Ebene $x + iy = \lambda$ deuten.

*) Die Algebristen machen über die Art der in ihren Formen
vorkommenden Coefficienten keine Voraussetzung; die
Zahlentheoretiker wählen die Coefficienten ganzzahlig,
das ist der ganze Unterschied. Die Algebra erscheint hier
als Vorstufe der Zahlentheorie.

„Die allgemeine projektive Geometrie der Kugelfläche findet in der $x + iy$ = Ebene dann ihr Abbild, wenn ich die ebene Geometrie unter Zugrundelegung der Gruppe der reciproken Radien traktiere, d. h. derjenigen Gruppe, welche die gewöhnlichen Bewegungen umfasst, die Ähnlichkeitstransformation, die Spiegelung und die eigentlich sogenannte Inversion durch reciproke Radien."

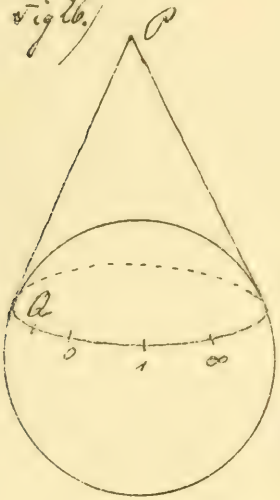
(vgl. Erlanger Programm S. 6, vgl. auch die Berichtigung in der italienischen Uebersetzung von 1890.)

Ad. b. Wir wollen uns hier zuerst über die zugehörige Gruppe orientieren. Welche Gruppe von Umänderungen ist noch zulässig, wenn ein Punkt ausserhalb der Kugel festgehalten wird?

Der Kreis, in welchem der von dem festen Punkte an die Kugel gelegte Kegel diese berührt, muss in sich übergehen. Wir machen ihn zum Kreis der reellen Zahlen, indem wir auf ihm $0\,1\,\infty$ beliebig annehmen. Es werden dann nur solche Substitutionen $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ zulässig sein, bei denen reellen Werten von λ reelle Werte von λ' entsprechen, d. h. es müssen die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell sein. Es erleidet dann natürlich μ ganz dieselbe Substitution: $\mu' = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}$, weil doch die konjugierte Wert einer reellen Grösse diese Grösse selbst ist. Es werden daher λ und μ dann cogredient,

und die Gleichung $\lambda - \mu = 0$ bleibt bei allen Substitutionen ungeändert. Dies ist eben die Gleichung des Berührungskreises. Wenn wir die so definierte Geometrie auf der Kugel dann bequem auf die Ebene projicieren wollen, so ist es zulässig, den Projektionspunkt Q auf dem Kreise der reellen Zahlen zu wählen (spec. den Punkt ∞) und als Ebene diejenige Ebene anzunehmen, welche dem Projektionspunkt in Bezug auf das Kugelcentrum diametral gegenüber liegt. Der Kreis der reellen Zahlen wird sich dann als Gerade projicieren, die wir als x-Axe zu wählen haben.

(Fig 26.)



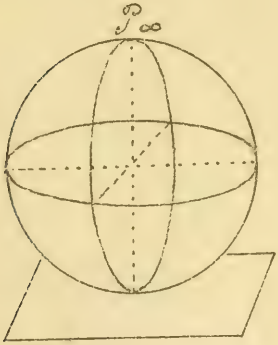
Die unter sich identischen linearen Substitutionen von λ und μ mit reellen Coefficienten entsprechen dann den Bewegungen einer hyperbolischen Massbestimmung in der $x + iy$ = Ebene, bei der die Punkte der x-Axe das ∞ Weite vorstellen und die Kreise, welche die x-Axe rechtwinklig schneiden, die geodätischen Linien sind. Denn letztere sind die Projektionen der Kugelkreise, deren Ebene durch den

im Raum festgehaltenen Punkt hindurchgeht. (vgl. Anm. pag. 168.). Diese Art der Darstellung der hyperbolischen Geometrie haben wir übrigens ja im Wintersemester bereits ausführlich besprochen.

Ad c. Wir wählen den auf der Kugel gelegenen festbleibenden Punkt als den Punkt ∞. Dann folgt, daß die hier in Betracht kommenden Substitutionen die Form haben müssen:

$$\lambda' = \alpha\lambda + \beta \; ; \quad \mu' = \bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}.$$

Fig. 27.



In üblicher Weise auf die Ebene übertragen, ist dies bekanntlich die Gruppe, welche aus den Parallelverschiebungen, Drehungen und Aehnlichkeitstransformationen der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie besteht.*) Will ich mich aber auf solche Operationen beschränken, die die parabolische Maassbestimmung ungeändert lassen, so muß ich die Aehnlichkeitstransformationen im engeren Sinne ausschließen, dies bedeutet, daß $\alpha = e^{i\vartheta}$ zu setzen ist, d.h. es muß $|\alpha| = 1$ genommen werden.

*) Wir könnten diese Gruppe nach der allgemeinsten in ihr enthaltenen Transformationsart die Gruppe der „Aehnlichkeitstransformationen" nennen.

dd d. "Was sind es hier für lineare Substitutionen, denen ich λ unterwerfen darf, wo wir einen Punkt innerhalb der Kugel festhalten? Diese Substitutionen haben offenbar die Eigenschaft, daß in Bezug auf den festbleibenden Punkt diametrale Werte des λ wieder zu diametralen Werten werden." *)

„Wählt nun daher den festbleibenden Punkt zum Centrum der Coordinatenbestimmung, so handelt es sich hier nur noch um diejenigen linearen Substitutionen, welche nach der Vorlesung, welche von den reellen Schiebungen einer nulldeligen F_2 in sich handelte, durch die Formeln geliefert wurden:

$$\lambda' = \frac{(\alpha + i\mathfrak{C})\lambda - (\mathfrak{B} - i\mathfrak{D})}{(\mathfrak{B} + i\mathfrak{D})\lambda + (\alpha - i\mathfrak{C})} \quad \text{und conjugirt.}$$

$$\mu' = \frac{(\mathfrak{A} - i\mathfrak{C})\mu - (\mathfrak{B} + i\mathfrak{D})}{(\mathfrak{B} - i\mathfrak{D})\mu + (\mathfrak{A} + i\mathfrak{C})}.$$

Wir wollen diese Substitutionen solche von Quaternionentypus nennen aus einem tief liegenden Grunde. **)

*) Insbesondere werden also die beiden festbleibenden Punkte jeder einzelnen Substitution diametrale Werte sein.

**) der natürlich aufs Engste zusammenhängt mit der früher für die „Schiebungen" aufgestellten Quaternionenformel; wir verfolgen das im Texte nicht weiter.

Es ist eine erste Substitution des λ gegeben durch:

$$\lambda_1' = (A + iC)\lambda_1 - (B - iD)\lambda_2.$$

$$\lambda_2' = (B + iD)\lambda_1 + (A - iC)\lambda_2.$$ Ihre Determinante ist gleich $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$.

Eine zweite Substitution sei

$$\lambda_1'' = (A' + iC')\lambda_1' - (B' - iD')\lambda_2'.$$

$$\lambda_2'' = (B' + iD')\lambda_1' + (A' - iC')\lambda_2'.$$ Die Determinante ist gleich $A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$.

Nun wollen wir diese beiden Substitutionen hinter einander anwenden, wie drückt sich dann $\lambda_1'' + \lambda_2''$ durch λ_1 und λ_2 aus?

Es wird offenbar:

$$\lambda_1'' = \lambda_1 \cdot [(A' + iC')(A + iC) - (B' - iD')(B + iD)]$$
$$- \lambda_2 \cdot [(A' + iC')(B - iD) + (B' - iD')(A - iC)]$$

oder:

$$\lambda_1'' = \lambda_1 \cdot (A'' + iC'') - \lambda_2 (B'' - iD'').$$

Entsprechendes ergiebt die Ausrechnung:

$$\lambda_2'' = \lambda_1 \cdot (B'' + iD'') + \lambda_2 (A'' - iC'').$$

Eine einfache Vergleichung läßt dann erkennen, daß:

$$A'' = AA' - BB' - CC' - DD'. \quad \Big| \quad A''^2 + B''^2 + C''^2 + D''^2$$
$$B'' = AB' + A'B - CD' + C'D. \quad \Big| \quad (A^2 + B^2 + C^2 + D^2).$$
$$C'' = AC' + A'C + DB' - D'B. \quad \Big| \quad (A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).$$
$$D'' = AD' + A'D - BC' + B'C.$$

Auf Grund der Entwickelungen pag. 120 ergiebt sich dann, was wir darlegen wollten:

4 Wir nennen eben unsere Substitutionen solche vom Quaternionentypus, weil zwei Substitutionen $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ hintereinander angewandt sich gerade so kombinieren, wie man zwei Quaternionen multipliziert."

Im übrigen bedeutet natürlich jede solche Substitution eine Drehung der Kugel um das Centrum.

Wir werden nun nach der Drehungsaxe und dem Drehungswinkel fragen. Bezeichnen wir mit φ den Drehungswinkel und mit ξ, η, ζ die Coordinaten des einen Endpunktes der Drehungsaxe, so haben wir, wenn wir den Kugelradius $= 1$ wählen:

$$A = \xi \cos\frac{\varphi}{2}, \quad B = \xi \sin\frac{\varphi}{2}, \quad C = \eta \sin\frac{\varphi}{2}, \quad D = \zeta \sin\frac{\varphi}{2}; \quad *)$$

wobei $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ wird.

Diese Formel findet sich abgeleitet und discutiert beispielsweise in meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 32-34." (Leipzig 1884).

Wir wollen die Betrachtungen der vier Arten der Geometrie auf der Kugel jetzt in soweit anwenden, daß wir eine Reihe von Bemerkungen funktionentheoretischen Charakters anknüpfen, die uns zeigen sollen, in welchen Fragen die Geometrieen in der

*) Man bemerkt, daß hier die Aufeinanderfolge der Buchstaben nicht glücklich gewählt ist; es wäre besser, A mit D zu vertauschen.

Funktionentheorie von Bedeutung werden. Es sind hier 2 Punkte zu erwähnen (die untereinander natürlich eng zusammenhängen) die Theorie der linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung und die Theorie der automorphen Funktionen einer Veränderlichen, die wir jetzt beide im Einzelnen besprechen wollen.

In der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung werden wir uns ganz allgemein mit bestimmten Kreisbogendreiecken oder Kreisbogenpolygonen zu beschäftigen haben. es sind dies Untersuchungen, welche anknüpfen an die Abhandlung: Schwarz, „zur Theorie der hypergeometrischen Reihe," Crelle Bd. 75." (1872.)

„Die Geometricen b, c, d kommen in diesen funktionentheoretischen Untersuchungen alsdann zur Geltung, wenn man von allgemeinen sphärischen Dreiecke zu handeln hat, dessen Seitenflächen sich entweder in einem Punkte ausserhalb der Kugel oder auf der Kugel oder im Innern der Kugel ergeb. treffen werden."

„Wenn wir uns dagegen ebenfalls mit sphärischen Kreisbogenpolygonen beschäftigen so wird die allgemeine projektive Geometrie a, f am Platze sein, es sei denn, dass sich zufälligerweise die Begrenzungsebenen des Polygons in einem einzigen Punkte schnitten, was auf die Geometricen b, c, d hinführt."

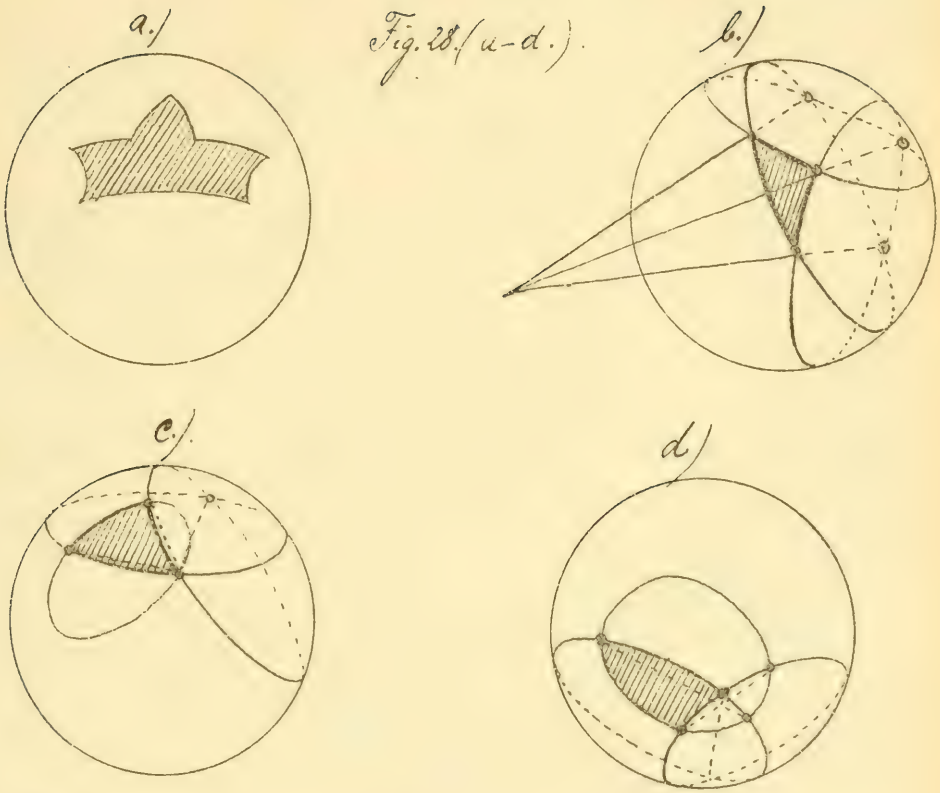


Fig. 28. (a-d.).

Um dies etwas auszuführen: Man kann einem gewöhnlichen sphärischen Dreieck, *) wenn es auf der Kugel gezeichnet ist, gleich ansehen, ob es der einen oder der anderen Art angehört. Bezeichnen wir die drei Winkel desselben mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, so haben wir den Satz:

„Je nachdem bei einem solchen sphaerischen Dreieck

*) d. h. einem solchen ohne überstumpfe Winkel.

$\lambda + \mu + \nu \leqq 1$ ist, haben wir den Fall b, c oder d."

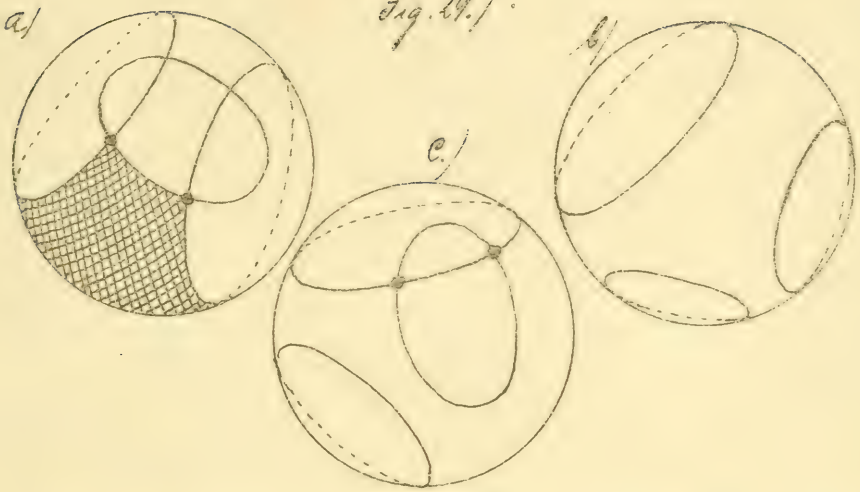
Indem wir so sagen, haben wir den Begriff des sphaerischen Dreiecks ganz in der Form der gewöhnlichen Geometrie gefasst.

Allerdings werden wir später *) nicht blos elementare Dreiecke gebrauchen, bei denen λ, μ, ν sicher positiv und < 1 oder doch < 2 sind.

Wir werden auch sphaerische Dreiecke zu betrachten haben, bei denen Windungspunkte irgend welcher Multiplicitäten in den Ecken liegen; wir werden bald erkennen, wie ein solches Dreieck aussieht. Auch die Fälle werden wir heranzuziehen haben, wo geradezu einige Ecken fehlen, indem sich die zu den Ecken gehörigen Begrenzungskreise überhaupt nicht treffen, was bei negativen Werten der λ^2, μ^2, ν^2 vorkommt und natürlich zur Kategorie b hinführt. Statt in eine Ecke auszulaufen, windet sich ein derartiges Dreieck mit einem zwischen zwei festen Kreisen eingeschlossenen Bande endlos um die Kugel herum.

*) Nämlich in der parallellaufenden Vorlesung über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die λ, μ, ν sind uns dort als Exponentendifferenzen der P-Funktionen bereits bekannt!

Fig. 29.1.



Wir geben jetzt dem in Aussicht gestellten Blick auf die Theorie der automorphen Funktionen.

Eine automorphe Funktion wird durch die Gleichung charakterisiert:

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\alpha_k \lambda + \beta_k}{\gamma_k \lambda + \delta_k}\right) \quad k = 0, 1, \ldots$$

Wir haben es hier mit einer „durchaus discreten" Gruppe von Transformationen zu thun, indem evidenterweise die Coefficienten der Substitution nicht kontinuierliche Werte annehmen dürfen, auch keine unendlich kleinen Substitutionen vorkommen sollen. Doch werden offenbar die in Anwendung kommenden discreten Transformationen

jedesmal in einer kontinuierlichen Gruppe enthalten sein, und wir fragen uns daher: Was für discrete Gruppen von Transformationen sind bereits in der continuierlichen Gruppe c, d, b enthalten? Welche erst in a? Wir wollen die verschiedenen Fälle kurz einzeln besprechen, indem wir charakteristische Beispiele herausgreifen.

1.) In die Gruppe c werden alle Funktionen zu rechnen sein, die der Gleichung genügen:

$f(\lambda) = f(\lambda + \beta_k)$ $k = 0, 1 \ldots$. Es sind dies die einfach und doppelt periodischen Funktionen.

2.) Bei den Transformationen d soll ein Punkt des Kugelinnern fest bleiben, nehmen wir etwa der Einfachheit halber den Mittelpunkt. (Die betr. Transformationen sind also durch die gewöhnlichen Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt veranschaulicht.) Die hierher gehörigen Funktionen sind der eigentliche Gegenstand der „Vorlesungen über das Ikosaeder." Vgl. daselbst insbesondere pag. 36–42. Dort sind zunächst die sämmtlichen in Betracht kommenden Substitutionsgruppen angegeben. (Dieder, Tetraeder, Oktaeder u. Ikosaeder.). Es handelt sich dann ferner um diejenigen rationalen Funktionen $f(\lambda)$, die bei den 60 Drehungen des Ikosaeders in sich ungeändert bleiben. Wir nennen solche Funktionen:

„fundamentale rationale Funktionen der regulären Körper." Eben diese Funktionen sind dann die zur Kategorie d.) gehörigen automorphen Funktionen.

3.) In der Kategorie b.) wird es sich um Funktionen handeln, die durch reelle Substitutionen in sich übergehen. Hierher gehören vor allen Dingen die elliptischen Modulfunktionen, *) die sich ergeben, wenn wir die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ der elliptischen Funktionen auffassen als eine Funktion des Periodenquotienten $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$. Diese bleiben ungeändert bei einer unendlichen Anzahl linearer Substitutionen $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, nämlich bei denjenigen Substitutionen, deren Coefficienten a, b, c, d reelle ganze Zahlen von der Determinante $ad - bc = 1$ sind.

4.) Zu b.) gehören weiter noch die Funktionen, auf die Poincaré 1881 die Aufmerksamkeit lenkte, und die er „fonctions Fuchsiennes" nannte. Entsprechend bezeichnet er die durch Substitutionen der Gruppe a in sich übergehenden Funktionen als „fonctions Kleinéennes." Ich habe selbst im vorigen Wintersemester darauf hingewiesen, daß

*) vgl. die gleichzeitige Vorlesung über Differentialgleichungen und das in Druck befindliche Werk von Fricke und mir.

ich diese Benennungen für nicht zweckmäßig gewählt halte, und man lieber auf Personal-bezeichnungen verzichten soll, zumal wenn sie leicht zu einer unrichtigen Auffassung über die Bedeutung der Arbeiten neben einander lebender Forscher Veranlassung geben können. Einmal hat Fuchs zwar in angrenzenden Gebieten, aber nicht eigentlich über die Funktionen θ. gearbeitet, dann sind auch von anderen Forschern (Schwarz, Schottky, Riemann) wichtige Specialfälle der Funktionen θ wie α bereits vorneg behandelt. Es wird wohl darauf verwiesen, daß auch die Benennung „Abelsche Funktionen" in ähnlicher Weise unrichtig eingeführt sei. Doch wenn Jacobi die von ihm untersuchten Funktionen zu Ehren von Abel als „Abelsche Funktionen" bezeichnet, so war dies eine freiwillige Selbstentsagung. Poincaré hat aber seine Bezeichnung ursprünglich gewählt, ohne die Literatur irgendwie genau zu kennen. Man könnte nun die bezeichneten Funktionen vielleicht Riemannsche Funktionen nennen, wie ich in Annalen 19, pag. 564 vorschlug (insofern die gesammte funktionentheoretische Denkweise, mit der wir arbeiten, wesentlich auf Riemann zurückgeht), doch hat dieser Vorschlag keinen Anklang gefunden und ich ziehe

ueber die Benennungen: allgemein automorphe und reell automorphe Funktionen etc. vor. Das bisher Gesagte läßt sich alsdann kurz zusammenfassen:

„Den Gruppen a, b, c, d entsprechend wird man die automorphen Funktionen einteilen in allgemein automorphe Funktionen, in reell automorphe Funktionen, in periodische Funktionen im älteren Sinne (additiv automorphe Funktionen!) und in die Funktionen der regulären Körper."

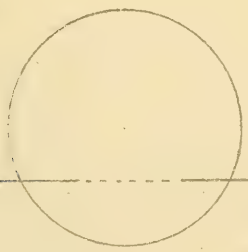
Soviel zur Orientierung auf diesem Gebiet. Nun müssen wir noch eine letzte Frage betreffend die Geometrie auf der Kugel beantworten, wobei wir dann aber wieder den Gesammtraum mit in Betracht ziehen wollen, d. h. die Collineationen dieses Raumes, welche die Kugel in sich verwandeln. Wir fragen uns, was bedeutet eigentlich die einzelne Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ auf der Kugel, und was für eine Art Bewegung des nicht Euklidischen Raumes, dessen Fundamentalfläche unsere Kugel ist, ist hierdurch gegeben? Wir haben früher gesehen, wenn man eine Fläche 2ten Grades in sich transformiert, (so zwar, daß die erzeugenden Schaaren nicht wechseln), so bleibt allemal ein Tangentialtetraeder fest. Da nun ein Tangential-

tetraeder bei der Kugel immer 2 und nur 2 reelle Ecken auf der Kugel hat, indem die in ihnen zu construierenden Tangentialebenen sich ausserhalb der Kugel schneiden, so haben wir den Satz:

„Auf der Kugel werden bei jeder Bewegung allgemein zu reden 2 reelle Punkte festbleiben."

Die reelle Linie alsdann, welche die genannten beiden reellen Punkte verbindet, wird dann bei der Bewegung des Raumes in sich verschoben werden (so dass ihre Schnittpunkte mit der Kugel festbleiben), während der Raum sich um sie dreht. uns interessiert hierbei vom Standpunkte der Nichteuklidischen Geometrie aus besonders das Stück der Linie im Innern der Kugel. Diese Nichteuklidische Bewegung nennt man eine Schraubenbewegung. bei ihr fungiert die Verbindungslinie der beiden festbleibenden Punkte als Schraubenaxe.

Fig. 30.)



Wir setzen nun, um die festbleibenden Punkte direkt zu bestimmen, in

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta} \quad \lambda' = \lambda, \text{ so folgt:}$$

$$\gamma\lambda^2 + (\delta-\alpha)\lambda - \beta = 0 .$$

Dies liefert uns die Werte:

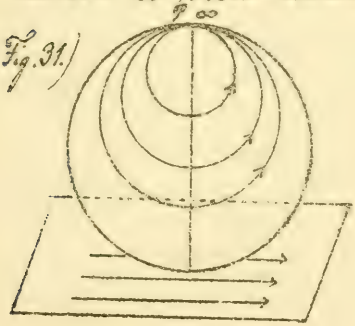
$\lambda = \frac{a-\delta \pm \sqrt{(a-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}$ für die beiden festbleibenden Punkte.

Wir haben hier *) zunächst zu unterscheiden, ob die Quadratwurzel gleich null wird oder nicht. Wir kommen weiterhin zu den verschiedenen Arten der Substitution, wie sie beispielsweise in den „Vorlesungen über Modulfunctionen" (Leipzig 1880) pag. 163 ff. ausführlich betrachtet werden.

Dort wird unterschieden zwischen der parabolischen, elliptischen, hyperbolischen und loxodromischen Substitution. Die parabolische Substitution ist eben durch das Verschwinden des Wurzelausdruckes $(a-\delta)^2 + 4\beta\gamma$ definiert, bei ihr fallen die beiden festbleibenden Punkte zusammen.

Wählen wir im Falle der parabolischen Substitution den festbleibenden Punkt zum Unendlichkeitspunkt, $(\lambda = \infty)$, so können wir die Substitutionen, um welche es sich handelt, allemal auf die kanonische Form bringen: $\lambda' = \lambda + \beta$.

Fig. 31)



Wenn wir dann in gewöhnlicher Weise die Kugel auf die Ebene stereographisch projicieren

*) indem wir jetzt in die Einzeldiscussion eintreten.

(v. Figur), so handelt es sich in der Ebene um eine einfache Parallelverschiebung, wie sie durch die Gleichung gegeben ist

$x' + iy' = x + iy + (b + ic)$. Was bedeutet dies dann auf der Kugel?

„Dem Umstande entsprechend, daß ein System paralleler gerader Linien der gewöhnlichen Ebene sich in sich selbst verschiebt, verschieben sich auf der Kugel lauter Kreise in sich selbst (v. Fig. 31.), die sich in dem festbleibenden Punkte berühren." Wir ziehen jetzt die zugehörige Collineation des Gesammtraums in Betracht und finden in dieser Hinsicht:

„Innerhalb jeder durch einen solchen Kreis der Kugel hindurch gelegten Ebene durchläuft dabei jeder Punkt des Raumes einen bestimmten Horocyclus*) der zugehörigen nicht-Euklidischen Maassbestimmung und alle Horocyclen, die von den verschiedenen Raumpunkten so durchlaufen werden, werden wir als parallel bezeichnen dürfen, weil sie sich in demselben Punkte der absoluten Kugel berühren."

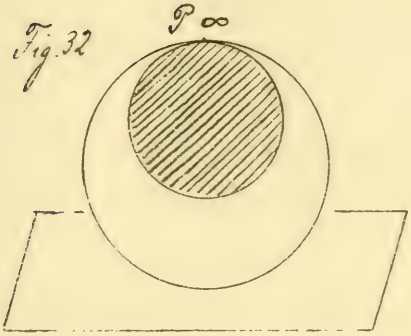
Dies also wäre die „parabolische" Bewegungsform unseres Nichteuklidischen Raumes. —

Wir haben jetzt weiter den Fall zu betrachten, wo zwei getrennte Wurzeln.

*) v. die Wintervorlesung.

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{(\alpha-\delta) \pm \sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\gamma}$$

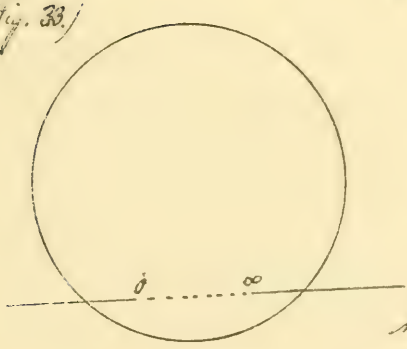
Fig. 32



für die, bei der Substitution: $\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ festbleibenden Punkte sich ergeben. Es steht dann offenbar nichts im Wege, auf der Kugel ein neues Coordinatensystem einzuführen, der Art, daß der 0- und der ∞-Punkt in die festbleibenden Punkte zu liegen kommen. Die lineare Substitution nimmt dann die kanonische Form an: $\lambda' = k \cdot \lambda$. Durch einfache Ausrechnung ergiebt sich alsdann für k der Wert:

$$k = \frac{(\alpha+\delta \mp \sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}\,)^2}{4\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)}.$$

Fig. 33.



Die weitere Einteilung dieser allgemeinen Substitution $\lambda' = k \cdot \lambda$ erfolgt nun nach dem Werte, den die Konstante k annimmt. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden.

1.) Es habe k den Wert $\varepsilon^{i\varphi} = \cos.\varphi + i \sin.\varphi$, d.h. sei $|k| = 1$. Dies ist der Fall der elliptischen Substitutionen.

2.) Es sei k reell. Dann reden wir von hyperbolischer Substitution.

3.) Es möge k beliebig komplex sein. Dieser allgemeinste Fall tritt für unser Interesse zurück, da wir ihn aus den beiden ersten Fällen zusammensetzen können. Wir nennen diese Substitution die loxodromische.

Wir können uns diese Substitutionen nun wieder klar machen, wenn wir unser λ zunächst wieder in der Ebene deuten und die hier sich darbietenden Verhältnisse dann auf die Kugel in bekannter Weise übertragen. Wir gehen unsere drei Fälle einzeln durch:

1.) Im ersten Falle war gesetzt: $\lambda' = \varepsilon^{i\varphi} \cdot \lambda$. In der Ebene bedeutet diese Substitution eine Drehung derselben, „die Trajektorien d.h. die Bahncurven der einzelnen Punkte der Ebene sind concentrische Kreise um den Nullpunkt." Wenn wir dies nun in gewöhnlicher Weise (v. Figur) auf die Kugel übertragen, so haben wir eine Drehung der Kugel um den Durchmesser 0∞ um den Winkel φ, wobei, wenn wir die Punkte $0, \infty$ als Pole auffassen, die

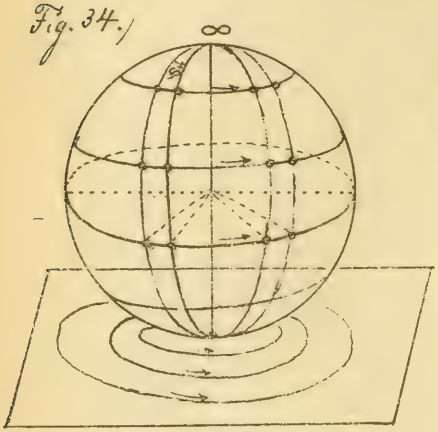
kreise die Trajektorien der einzelnen Kugelpunkte vorstellen. Dies übertragen wir nun leicht auf den Fall, wo die Punkte 0 und ∞ eine schiefe Lage auf der Kugel besitzen. Wir sehen sofort, was aus den Breitenkreisen wird, wenn wir uns erinnern, daß diese durch Ebenen ausgeschnitten werden, die durch die unendlich weite Gerade der Horizontalebene, d.h. durch die konjugierte Polare des Durchmessers 0∞ hindurchgehen. An Stelle dieser Breitenkreise treten in unserem allgemeinen Fall dann diejenigen Kreise der Kugel, welche von Ebenen ausgeschnitten werden, die durch die konjugierte Polare der jedesmaligen Axe 0∞ hindurchgehen. (Die konjugierte Polare der Axe 0∞ erhält man bekanntlich als Schnittgerade der beiden Tangentialebenen in den Punkten 0∞.)

An Stelle der Meridiane treten diejenigen Kreise der Kugel, deren Ebenen durch die Axe 0∞ selbst hindurchlaufen. Die Bewegung der einzelnen Kugelpunkte ist hiernach folgende:

„Jeder Punkt der Kugel rückt unserer Substitution entsprechend auf dem durch ihn hindurchgehenden Breitenkreise ein solches Stück fort, daß der durch ihn hindurchgehende

Meridian um den Winkel φ gedreht erscheint."
(vergl. die beiden Figuren.).

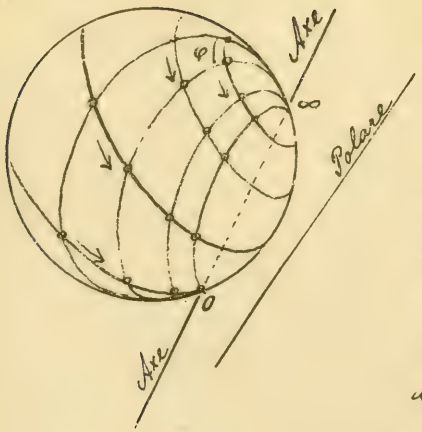
Fig. 34.)



Was für eine Bewegung des Gesammtraumes tritt nun gleichzeitig hier ein? Wir denken uns, wie in letzter Vorlesung, eine Kugelkalotte abgeschnitten längs eines Trajektorienkreises.

In der Ebene, die wir durch Schraffierung hervorgehaben haben, verschiebt sich dann offenbar der Trajectorienkreis in sich, während der Punkt im Innern, in welchem die Axe 0∞ die Ebene durchsetzt, fest bleibt. (Fig. 35)

Fig. 35.)

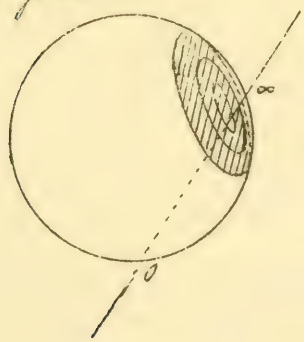


Eine solche Collineation der Ebene in sich ist uns aber bereits bekannt vom Wintersemester her, sofern wir den Trajektorienkreis als absoluten Kegelschnitt ansehen, wir wissen, welche

Curve jeder Punkt der Ebene hierbei beschreibt, nämlich einen Nichteuklidischen Kreis. Wir wollen die der Art sich ergebende Nichteuklidische Bewegung als Rotation des Raumes um eine Axe bezeichnen. Wir haben daher als Schlussergebnis zusammengefasst:

„Die einer elliptischen Substitution von λ entsprechende nicht-Euklidische Bewegung ist eine Rotation des Raumes um die das Kugelinnere durchsetzende Axe $\infty 0$, bei welcher jeder Punkt der Axe fest bleibt und jeder andere Raumpunkt einen Kreis (im nicht-Euklidischen Sinne) beschreibt, welcher in derjenigen Ebene liegt, die durch ihn (den Raumpunkt) und die Polare der Axe hindurchgeht."

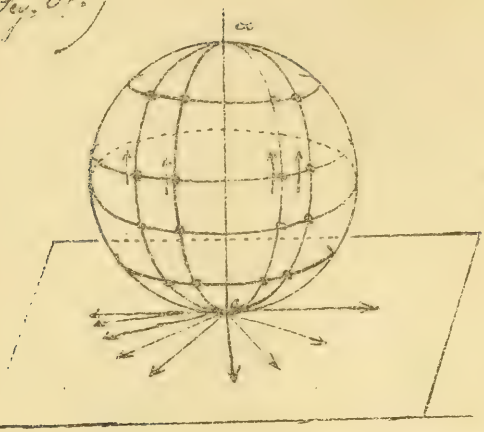
Fig. 36.)



2.) Wir gehen nun zur hyperbolischen Substitution über: $\lambda' = k \cdot \lambda$, wo k reell ist.

„In der λ-Ebene haben wir hier einfach eine Aehnlichkeitstransformation, bei welcher die Ebene vom Coordinatenanfangspunkt als festem Punkt aus auf das k-fache gestreckt wird.

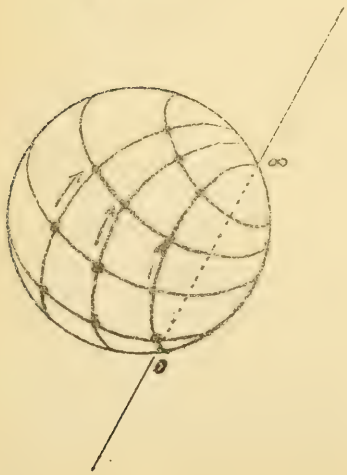
Fig. 37.



Dies besagt, dass auf der Kugel jeder Punkt auf dem durch ihn gehenden Meridian fortrückt, jedoch so, dass alle Punkte, welche vorher auf einem Breitenkreise liegen, auch nachher auf einem solchen liegen."

Dies können wir sofort auf den Fall der allgemeinen Lage der Punkte 0∞ auf der Kugel übertragen. Wenn wir auch hier in leicht verständlicher Weise die Bezeichnungen „Meridian" und „Breitenkreis" anwenden, so erkennen wir:

Fig. 38.



„Auf der Kugel wandert auch im allgemeinen Fall jeder Punkt auf einem Meridian, so zwar, dass die Punkte, welche auf einem Breitenkreise lagen, auch später auf einem Breitenkreise liegen."

(Vgl. wieder die Figuren!).

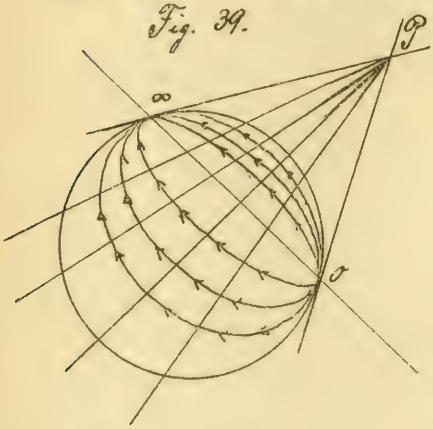
Vergleichen wir diese Sätze mit denen der elliptischen Substitution, so sehen wir, daß die Bezeichnungen: Breitenkreise und Meridiane ihre Rolle gewechselt haben. Da diese Linien auf der Kugel beziehungsweise in Ebenen durch die Axe 0∞ oder ihre conjugierte Polare liegen, so können wir auch sagen:

„Der Unterschied der hyperbolischen und elliptischen Substitution ist geradezu der, daß die Axe und die konjugierte Polare ihre Bedeutung mit einander vertauscht haben."

Wie stellt sich nun die Bewegung des Gesammtraumes im Fall der hyperbolischen Substitution dar? Denken wir uns einmal eine Meridianebene für sich gezeichnet (s. Fig. 39) – in der Figur verläuft die konjugierte Polare durch P senkrecht zur Zeichnung –, so erkennen wir, daß bei der nicht-Euklidischen Bewegung dieser Ebene in sich der Meridiankreis als solcher unverändert bleibt, seine Punkte jedoch vom Punkte 0 aus nach dem Punkte ∞ oder umgekehrt sich verschieben, und daher die durch P laufenden Strahlen eine entsprechende Drehung erleiden. Jeder Punkt der Ebene bewegt sich hierbei, wie [illegible]

her wissen, auf einem nicht = Euklidischen Kreise, dessen „idealer" Mittelpunkt in P liegt und welcher daher den Meridiankreis in den Punkten 0 und ∞ berührt.

Fig. 39.



„Wir haben daher allgemein eine nicht = Euklidische Bewegung, bei welcher jede Meridianebene sich in sich selbst verschiebt so zwar, dass jeder Punkt des Raumes in seiner Meridianebene eine zur Axe aequidistante Curve beschreibt. *)

3.) Wir sprechen jetzt noch kurz von dem Fall, wo k einen beliebig complexen Wert besitzt. Wir setzen $k = k_0 \cdot e^{i\varphi}$ und erkennen sofort:

„Dem Umstande entsprechend, dass jede komplexe Zahl in die Gestalt gesetzt werden kann: $k_0 \cdot e^{i\varphi}$, wo k_0 reell ist, lässt sich der allgemeine Fall durch eine Aufeinanderfolge einer elliptischen und einer hyperbolischen Substitution ersetzen."

*) Denn jene nicht = Euklidischen Kreise (Fig. 39.) können wir als „aequidistante" Curven zur Axe 0 ∞ charakterisieren.

Doch können wir uns auch klar machen, welche Bewegung der Kugelpunkte und weiterhin der Raumpunkte allgemein sich ergiebt, wenn wir die Ebene, in der wir λ denken, gleichzeitig drehen und sich um den Nullpunkt ausdehnen lassen.*) Dann beschreiben sämmtliche Punkte logarithmische Spiralen um den Nullpunkt als asymptotischen Punkt (indem diese Curven ja die Eigenschaft haben, die von dem Nullpunkt auslaufenden Strahlen unter gleichem Winkel zu schneiden (v. die Figur 39 in den „Modulfunktionen" pag. 168.))

„Dem in der Ebene geschilderten Vorgange entsprechend bewegt sich die Kugel dann sowohl im speziellen wie im allgemeinen Falle so in sich selbst, daß jeder ihrer Punkte eine Loxodrome d.h. eine isogonale Trajektorie der Meridiane von einem gewissen Steigwinkel beschreibt, während alle Punkte, die anfänglich auf einem Breitenkreise bezw. Meridiane liegen, auch später auf einem Breitenkreise bezw. Meridian liegen. Hieraus erklärt sich dann auch die Benennung „loxodromische Substitution."

*) Die strenge Formel dieser Bewegung wird durch $\lambda' = k^{\eta} \cdot \lambda$ gegeben, wo η von 0 bis 1 variirt.

„ Was nun die zugehörige nicht-Euklidische Bewegung des Gesammtraumes anbetrifft, so ist dieselbe eine Schraubenbewegung des Raumes um seine Axe, bei welcher die Trajektorie jedes Punktes sich mit ∞ vielen Windungen an die beiden Punkte 0 und ∞ heranzieht."

Dies sind also die verschiedenen Bewegungsformen, welche durch die Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ definiert sind. Zusammenfassend werden wir sagen können:

„ Jede Bewegung ist eine Schraubenbewegung, die insbesondere in eine Rotation oder eine Verschiebung längs der Axe ausarten kann (elliptischer u. hyperbolischer Fall), wo übrigens auch die Axe unendlich weit fortrücken kann, so daß sie zur Tangente der Kugel wird (parabolischer Fall.)"

Anmerkung:

Was die Wahl der Bezeichnungen „ elliptisch, hyperbolisch, parabolisch" anbetrifft, so beziehen sie sich darauf: Wenn wir allein die reellen Werte von λ in der in der projektiven Geometrie üblichen Weise auf einer Geraden deuten, so werden diejenigen Substitutionen von λ,

welche eine reelle elliptische, hyperbolische, parabolische Maassbestimmung, die wir auf der λ-Axe festlegen mögen, unverändert lassen, gerade solche sein, welche wir entsprechend elliptisch, hyperbolisch, parabolisch genannt haben.

Wir beginnen das letzte Kapitel unserer Vorlesung, das sich mit der

Nicht-Euklidischen Geometrie

im speziellen beschäftigen soll. Wir haben ja schon manches vorweg behandelt; es würde sich jetzt darum handeln, dies im Zusammenhange übersichtlich darzustellen.

Wir fragen uns zunächst:

„Wie ordnet sich die gewöhnliche Metrik des Raumes von 3 Dimensionen in das System der projektiven Geometrie ein?" *)

Es seien mit x, y, z, t rechtwinklige homogene Punktcoordinaten, mit u, v, w, t rechtwinklige homogene Ebenencoordinaten dargestellt.

*) wobei wir uns aber auf ganz wenige kurze Andeutungen beschränken, da alles Wesentliche im Wintersemester bereits hinreichend ausführlich gegeben ist.

Es beruht das Wesen der metrischen Geometrie vom projektiven Standpunkte aus aufgefasst nun darin, dass es im Raume einen bestimmten Kegelschnitt, den sogenannten Kugelkreis giebt, auf den sich die metrischen Beziehungen gründen.

Es ist die Gleichung einer Kugel in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten allgemein gegeben durch:

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0 \text{ oder}$$

homogen geschrieben:

$$x^2+y^2+z^2+2Axt+2Byt+2Czt+Dt^2=0.$$

Setzen wir nun $t=0$, d.h. schneiden wir die Kugel durch die ∞ ferne Ebene, so erhalten wir die Schnittkurve als: $x^2+y^2+z^2=0,\ t=0$. Den hierdurch definierten Kegelschnitt nennen wir schlechtweg den Kugelkreis (er ist natürlich ein nullteiliger Kegelschnitt) und zwar auf Grund des durch unsere Formeln bewiesenen Satzes:

„Alle Kugeln des Raumes haben mit der ∞ fernen Ebene denselben nullteiligen Kegelschnitt gemeinsam und sind durch ihn als Kugeln definiert."

Es wird nun zu erläutern sein, dass in der That alle metrischen Beziehungen irgend welcher

räumlichen Figuren innerhalb der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie projektive Beziehungen der Figur zum Kugelkreis sind. Wir sprechen zunächst von der Maafsbestimmung in den binären Gebieten, als welche wir die Punktreihe, das Ebenenbüschel und das Strahlbüschel anzunehmen haben, und zwar wollen wir uns dabei, wenigstens in der Hauptsache, auf reelle binäre Gebiete beschränken.

1.) Zwei Punkte einer Punktreihe haben einen Abstand r, welcher sich in den Coordinaten ausdrückt als:

$$r = \frac{\sqrt{(xt'-x't)^2+(yt'-y't)^2+(zt'-z't)^2}}{t\,t'}$$

In dieser Formel, wollen wir bemerken, kommen nur Ausdrücke vor, die direkt zu dem Kugelkreis in Beziehung stehen. So ist $t=0$ die ∞ ferne Ebene, welche den Kugelkreis enthält; $(xt'-x't)^2+(yt'-y't)^2+(zt'-z't)^2=0$ dagegen ist die Gleichung des Kegels, der von dem Punkte x, y, z in laufenden Coordinaten $x'y'z't'$ nach dem Kugelkreis sich hinerstreckt.

„Der Ausdruck für r ist hiernach eine simultane Invariante der beiden Punkte und des Kugelkreises."

Wann wird nun $r=0$ sein? Natürlich

dann, wenn der Zähler verschwindet, d. h. wenn die beiden Punkte verbunden eine imaginäre Gerade liefern, die den Kugelkreis trifft, oder anders ausgedrückt:

„Zwei Punkte haben einen verschwindenden Abstand, wenn sie auf einer Minimalgeraden liegen." Fragen wir uns noch, wie weit die Punkte des Kugelkreises von irgend einem Raumpunkte entfernt sind, so bekommen wir als Antwort: $r = \frac{0}{0}$, d. h.:

„Die Punkte des Kugelkreises sind unbestimmt weit von einem beliebigen Raumpunkte entfernt."

2.) Wir betrachten weiter das Ebenenbüschel:

Der den Maafsbestimmungen zu Grunde liegende Kugelkreis ist in Ebenencoordinaten gegeben durch:

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$, wo u, v, w die Coordinaten einer beliebigen Tangentialebene des Kugelkreises sind.

Der Winkel φ, welchen zwei Ebenen u, v, w und u', v', w' des Büschels mit einander bilden, ist nun gemäfs den Betrachtungen der Wintervorlesung gegeben durch:

$$\varphi = \text{arc. cos.} \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} \cdot \text{ oder}$$

$$= \text{arc. sin} \frac{\sqrt{(vw'-v'w)^2+(wu'-w'u)^2+(uv'-u'v)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\ \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}$$

oder $= \frac{i}{2} \log. D.V.$, wo $D.V.$ das Doppelverhältnis ist, welches unsere beiden Ebenen mit den beiden durch ihre Schnittlinie gehenden Minimalebenen (d. h. den Tangentialebenen an den Kugelkreis) bilden.

Von der Maassbestimmung im Strahlbüschel wollen wir an dieser Stelle nicht weiter reden, sondern nur noch eine Bemerkung betr. die Punktreihe und das Ebenenbüschel hinzufügen.

Die Punktreihe haben wir bisher im Endlichen genommen; es ergab sich dann eine parabolische Maassbestimmung. Eine unendlich weit liegende reelle Punktreihe unterliegt jedoch nicht der gewöhnlichen parabolischen, sondern einer elliptischen Maassbestimmung. Umgekehrt unterliegt ein reelles Ebenenbüschel, dessen Axe ∞ weit liegt, nicht der gewöhnlichen elliptischen, sondern der parabolischen Maassbestimmung.

Diese Betrachtungen beziehen sich alle auf die binären Gebiete unseres Raumes; in entsprechender Weise können wir auch von den ternären Gebieten reden. Es würde in Betracht kommen (indem wir uns wieder auf reelle Gebiete

beschränken):

1. die Ebene und zwar:
   a. die gewöhnliche Ebene.
   b. die unendlich weite Ebene.
2. der Punkt (als Träger eines Ebenen- und Strahlenbündels) und zwar
   a. der gewöhnliche Punkt
   b. der unendlich weite Punkt.

Was zunächst die Ebene angeht, so haben wir in der gewöhnlichen Ebene eine parabolische Maassbestimmung, die sich auf die Kreispunkte in dieser Ebene gründet, in der unendlich fernen Ebene eine elliptische Maassbestimmung bezüglich des Kugelkreises selbst.

Was nun den Punkt betrifft, so haben wir in einem gewöhnlichen (im Endlichen gelegenen) Punkte eine elliptische Maassbestimmung bezüglich des zugehörigen Minimalkegels, d.h. des Kegels, der sich von dem Punkte aus nach dem Kugelkreise erstreckt, in einem unendlich weiten Punkt eine parabolische Maassbestimmung in Bezug auf das an den Kugelkreis gehende Tangentenpaar. Alles dies war ja im letzten Winter besprochen.

Hierdurch ergiebt sich nun eine Auffassung

der metrischen Verhältnisse, welche für viele geometrische Beziehungen außerordentlich nützlich ist. Wir können jedoch hier nicht im Einzelnen auf diese Beziehungen eingehen, wir wollen nur 3 Punkte kurz erwähnen:

1.) Fragen wir uns einmal, was sind die Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades und wie sind sie zu definieren?

„Wir wissen, je zwei Flächen 2ten Grades haben ein gemeinsames Polartetraeder. Wenn nun die eine der beiden Flächen zum Kugelkreise ausartet, dann geht das gemeinsame Polartetraeder gerade in das hier vorliegende Hauptaxentetraeder über*), so daß also die Lehre von den Hauptaxen der Fläche 2ten Grades als ein specieller Fall der allgemeinen Lehre von den 2 Flächen 2ten Grades gemeinsamen Polartetraeder erscheint."

2.) Was sind konfocale Flächen 2ten Grades?

Es sei eine Fläche zweiten Grades in Ebenencoordinaten geschrieben:

$\Phi(u, v, w, w) = 0$ Wir nehmen den Kugelkreis

*) d. h. dasjenige Tetraeder, welches durch die H. p. taxen und die unendlich weite Ebene bestimmt ist.

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$ hinzu als eine 2te Fläche 2ten Grades. Dann wird die Schaar der zu $\Phi(u, v, w\, w) = 0$ konfocalen Flächen 2ten Grades gegeben durch: $\Phi + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$. Dies Resultat drückt man nun gewöhnlich geometrisch aus, indem man sagt:

„Confocale Flächen 2ten Grades sind solche, welche in dieselbe den Kugelkreis enthaltende Developpable einbeschrieben sind."

[Näheres v. bei Salmon-Fiedler, anal. Geom. d. Raumes I. Kap. IV. Dort wird man erkennen, wie nützlich es ist, die Theorie der konfocalen Flächen 2ten Grades unter Bezugnahme auf den Kugelkreis zu entwickeln, indem eine grosse Zahl von Sätzen sich sehr einfach auf diese Weise ergeben.]

3.) Doch auch die Theorie der höheren Flächen giebt uns Beispiele, welche Summe von Hülfsmitteln in der That die Heranziehung des Kugelkreises uns an die Hand giebt. Vgl. z. B. Die Theorie der Minimalflächen von Sophus Lie, Annalen 14, 15.

Die Beziehungen zum Kugelkreise sind übrigens nicht nur bei rein geometrischen Fragen von Wichtigkeit, sondern ebensowohl bei gewissen Betrachtungen, die dem Gebiet der Mechanik

angehören. In dieser Hinsicht besprechen wir kurz:

1.) Das Gebiet der Kinematik oder die Lehre von den Bewegungen

2.) Die Mechanik der freien Systeme,

3.) Die Mechanik der starren Körper.

Wir wollen auf diese 3 Punkte einzeln näher eingehen.

1.) Die Kinematik oder die Lehre von den Bewegungen.

Wir haben ∞^6 Bewegungen im Euklidischen Raume. dieselben sind sämmtlich darzustellen als Collineationen, die den Kugelkreis festlassen. Wir können jedoch nicht sagen, daß jede Collineation des Raumes, die den Kugelkreis in sich überführt, nun auch umgekehrt eine gewöhnliche Bewegung des Raumes darstellt. Es sind unter diesen Collineationen noch die Aehnlichkeitstransformationen enthalten, d. h. diejenigen Collineationen, bei denen zwar die Winkel erhalten bleiben, doch die Strecken in Multipla ihrer selbst übergehen (Bei der nicht-Euklidischen Geometrie kommen diese Aehnlichkeitstransformationen in Wegfall, wie wir gleich hier bemerken wollen.) Der Fundamentalsatz der Kinematik ist

nun von Chasles 1829 ausgesprochen in dem Bulletin de Férussac. Dort hat er den Satz aufgestellt:

„Jede Bewegung (des Eukl. Raumes) ist eine Schraubenbewegung."

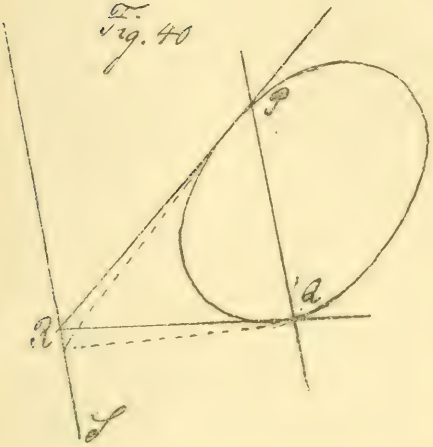
Wie haben wir dies von unserem projektiven Standpunkte aus aufzufassen? Bei jeder Collineation muß, wie wir wissen, ein Tetraeder fest bleiben, welches natürlich auch ausarten kann. Wo liegt nun dies Tetraeder bei unseren Bewegungen? Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns etwa denjenigen Fall der nicht-Euklidischen Geometrie herangezogen, bei dessen Bewegungen ein beliebiger einteiliger Kegelschnitt in sich übergeht. Denken wir uns diesen einteiligen Kegelschnitt gezeichnet, der also dem Kugelkreis der unendlich fernen Ebene entspricht, so werden bei der Collineation desselben in sich zwei Punkte (P u. Q) und die Tangente in ihnen fest bleiben. Diese bestimmen als Schnittpunkt einen dritten festbleibenden Punkt R, der als Eckpunkt des im Raume festbleibenden Tetraeders doppelt zu zählen ist, und durch ihn geht die weitere Kante RS des festbleibenden Tetraeders hindurch.

Dies auf den Fall der Euklidischen Geometrie

übertragen ergiebt:

" Dasjenige Tetraeder, welches bei einer Bewegung des Euklidischen Raumes der allgemeinen Theorie der Collineationen zufolge fest-bleiben soll, ist so ausgezeichnet, daß 2 seiner Ecken in der ∞ fernen Ebene zusammenfallen, während ihre Verbindungslinie wohl bestimmt bleibt und die Schraubenaxe des Chasles'schen Satzes abgiebt.

Fig. 40

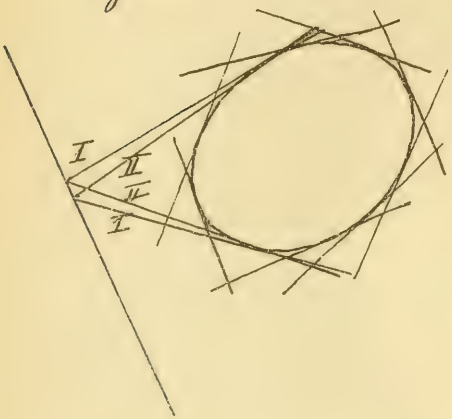


Die beiden anderen Ecken des Tetraeders sind die Berührungspunkte, welche die durch die Schraubenaxe hindurchgehenden Minimalebenen mit dem Kugelkreise gemein haben, und hierdurch sind dann die Kanten und Seitenflächen des Tetraeders völlig bestimmt."

Denken wir uns anstatt des festbleibenden Kegelschnittes (im spec. des Kugelkreises) zunächst ein sehr flaches Hyperboloid, so wird es bei diesem leicht sein, sich die Lage des bei einer Collineation des Raumes, bei der die T_2 in sich übergeht, festbleibenden Tangentialtetraeders zu

veranschaulichen.

Fig. 41.



„Unser in Fig. 40 dargestelltes Tetraeder erscheint dann als die Ausartung eines Tangentialtetraeders einer Fläche 2ten Grades, die sich einstellt, sobald die Fläche in den Kugelkreis oder sonst einen Kegelschnitt degenerirt."

Wir haben der Betrachtung der Kinematik im Euklidischen Raume noch eine Bemerkung hinzuzufügen, die uns zugleich einen Ausblick auf die Verhältnisse der nicht Euklidischen Geometrie eröffnen wird. Im Euklidischen Raume können wir bekanntlich die Bewegungen zusammensetzen aus dreifach ∞ vielen Parallelverschiebungen, die alle unter einander vertauschbar sind, und aus dreifach ∞ vielen Drehungen um einen festen Punkt O. Diese Zerlegung der ∞^6 Bewegungen ist jedoch im nicht-Euklidischen Raume nicht ausführbar, eben weil es keine Parallelverschiebungen und überhaupt keine dreifach unendlich vielen vertauschbaren Bewegungen giebt.

Dies erklärt die besondere Form, welche eine Reihe mechanischer Theoreme in der Euklidischen Geometrie abweichend von der nicht-Euklidischen Geometrie annehmen, indem in letzterer diese Theoreme sich infolge dessen gleichmäßiger gestalten. An diesen nur vorläufig ausgesprochenen Satz werden wir sogleich (bei Besprechung der Flächensätze etc.) wieder anzuknüpfen haben.

Wir gehen über zur

2. Mechanik freier Systeme.

Wie gewinnt man die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems, sagen wir, von Massenpunkten? Man stellt für die Massenpunkte einmal den Ausdruck für die lebendige Kraft auf: $T = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2$; wo ds_i das Bogenelement des Massenpunktes m_i bezeichnet, andererseits den Ausdruck des Potentials, welches, wenn man z. B. an den Fall des Planetensystems denkt, die Form annimmt:

$$U = C \cdot \sum \frac{m_i \cdot m_k}{r_{ik}}.$$

Wir bekommen alsdann die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems, wenn wir nach dem Hamilton'schen Princip verlangen, daß $\delta \int (T - U)\, dt = 0$ ist.

Wir werden uns nun gleich fragen können, wie dieser Ansatz in der nicht-Euklidischen Geometrie sich gestaltet. Was die lebendige Kraft angeht, so wird auch hier:

$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2$ zu setzen sein, wo natürlich unter ds_i das nicht-Euklidische Bogenelement zu verstehen ist. Weniger nahe liegt die Beantwortung der Frage, was man als Potential zweier Massenpunkte im nicht-Euklidischen Raume denken soll. In dieser Hinsicht sind 2 Arbeiten von Schering zu erwähnen, die beide in den Göttinger Nachrichten[1] in den Jahren 1870 und 1873 veröffentlicht sind. Die erste Arbeit führt den Titel: „die Schwerkraft im Gaußischen Raume." (wo natürlich als Gaußischer Raum der Raum der hyperbolischen Geometrie zu verstehen ist). Die zweite Arbeit dehnt die Untersuchungen allgemein aus einmal auf den Fall der elliptischen Geometrie, dann auf Räume von n Dimensionen. es ist dies die Abhandlung: „Die Schwerkraft im mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Raume." Weiter sind noch 2 Göttinger Dissertationen über diesen Gegenstand

zu nennen:

Fresdorf. 1873. „Ueber die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaussischen und Riemann'schen Raume." und

Opitz. 1881. „Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen."

Wir hatten die nicht-Euklidische Entfernung r gesetzt $r = c \cdot \log \cdot D V$. (hyperbolische Geometrie). resp.

$r = ic' \cdot \log \cdot D V$. (elliptische Geometrie), wo wir im speciellen $c' = \frac{1}{2}$ gewählt haben.

Nach der Scheringschen Formel ist alsdann die Potentialfunktion zweier Punkte, abgesehen von einer Constanten, die von den Maßen jener Punkte und den gewählten Einheiten abhängt, im Fall der hyperbolischen Geometrie gleich:

$$U = \pm \frac{1}{2c} \frac{e^{\frac{r}{2c}} + e^{-\frac{r}{2c}}}{e^{\frac{r}{2c}} - e^{-\frac{r}{2c}}}$$

oder wenn wir für r den obigen Wert einführen:

$$U = \pm \frac{1}{2c} \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D^{-1}}}{\sqrt{D} - \sqrt{D^{-1}}}.$$

Setzen wir hierin, um die entspr. Formel für die elliptische Geometrie zu erhalten, für c ein ic', so kommt:

$U = \mp \frac{1}{2c'} \cdot \operatorname{cotg} \frac{r}{2c'}$, oder in dem besonderen Falle, wo $c' = \frac{1}{2}$ ist,

$U = \mp \operatorname{cotg} r$.

In der That, wenn wir c unendlich werden lassen, um den Uebergang zur Euklidischen Geometrie zu machen, so geht die obige Formel für die hyperbolische Maassbestimmung, indem wir $e^{\frac{r}{2c}}$ in eine Potenzreihe entwickeln und uns auf die beiden ersten Glieder beschränken, über in

$$\frac{1}{2c} \cdot \frac{1 + \frac{r}{2c} + 1 - \frac{r}{2c}}{1 + \frac{r}{2c} - 1 + \frac{r}{2c}} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{2c}{r} = \frac{1}{r} \cdot \text{d. h.}$$

„Bei unendlich werdendem c entsteht wirklich aus dem Scheringschen Potentialausdruck das Elementarpotential $\frac{1}{r}$ der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie."

Im übrigen möchte ich hier gleich eine merkwürdige Sache einschalten, die den elliptischen Raum betrifft. Wir hatten, wie wir uns erinnern werden, denselben in zwei Gestalten kennen gelernt, einmal als einfachen, projektiven Raum, dann als verdoppelten oder sphärischen Raum. In ersterer Hinsicht war uns das Strahlen- und Ebenenbündel typisch, für welches die einfache elliptische Geometrie gilt,

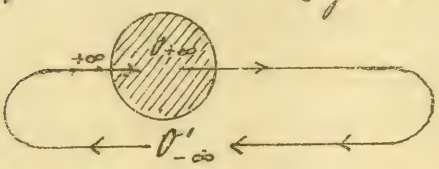
wenn wir aber das Strahlenbündel auf eine herumgelegte Kugel beziehen, so entstand auf der Kugel die sphaerische Geometrie, indem die Beziehung der Kugel auf das Strahlenbündel eine ein-zweideutige ist. Das Charakteristische dieser Verhältnisse bestand dann darin: In der einfachen Geometrie schneiden sich 2 kürzeste Linien in einem Punkte, die gesammte Länge der kürzesten Linie ist gleich π. In der sphaerischen Geometrie schneiden sich zwei kürzeste Linien in 2 Punkten, die gesammte Länge der kürzesten Linie ist gleich 2π. Der „Riemannsche Raum" wird nun im allgemeinen so verstanden und so geschieht es in den genannten Publicationen, daß ihm die zweite der genannten Geometrieen zu Grunde liegt.

Nachdem wir uns dies ins Gedächtnis zurückgerufen haben, wollen wir die Potential-funktion in einen und im anderen Raum der elliptischen Maassgeometrie betrachten.

1. Denken wir uns zunächst, daß wir im sphaerischen Raum operieren. Wir betrachten als Potentialfunktion den Ausdruck $\operatorname{ctg} r$, und nehmen dementsprechend etwa im Punkte

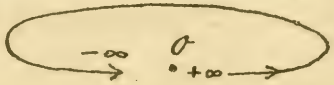
O eine anziehende Masse $= 1$ als vorhanden an. In ihm ist das Potential gleich $+\infty$. Wenn wir uns dann vom Punkte O aus entfernen, bis wir nach Durchlaufung der Strecke π zum Gegenpunkt O' gelangen, so wird in ihm das Potential ctg $r = -\infty$ sein.

Fig. 42.



Wir haben uns daher zu denken, daß im Gegenpunkte O' eine abstossende Masse gleich -1 vorhanden ist. Legen wir vom Gegenpunkte O' aus nochmals die Strecke π zurück, so gelangen wir wieder zum Ausgangspunkt O zurück, für den cotg. r dann den früheren Wert $+\infty$ wieder erhält. Diese Anschauungsweise, besonders was das Verhalten von cotg. r im Gegenpunkt O' angeht, ist ja einigermaßen complicirt, enthält aber durchaus nichts Widersinniges, da wir ja in Wirklichkeit in der Umgebung des Punktes O bleiben.

2. Nehmen wir nun den Fall des einfachen elliptischen Raumes vor. Wir gehen wieder aus von dem Punkte O, für den cotg. r gleich $+\infty$ ist, in dessen Nähe also Anziehung stattfindet.



Nach Durchlaufung der Strecke π kehren wir zum Punkte O zurück, für den dann $\operatorname{cotg} r = -\infty$ wird, was Abstossung in der Nähe des Punktes O voraussetzen würde.

„Im einfachen elliptischen Raume erweist sich daher $\operatorname{cotg} r$ als keine eindeutige Funktion der Ordinate der Raumpunkte.

$\operatorname{cotg} r$ und $-\operatorname{cotg} r$ gehen in einander über, sobald wir eine gerade Linie nach ihrer ganzen Durchstreckung durchlaufen. Das aber widerspricht der Vorstellung, welche wir von einem mechanischen Grundgesetze haben, wo doch die Kraft, die auf einen Punkt wirkt, an jedem Orte des Raumes eindeutig bestimmt sein soll, und deshalb also ist die Annahme des einfachen elliptischen Raumes mit der hier gewollten Ausdehnung der Potentialtheorie unverträglich."

Was nun die weitere Behandlung der mechanischen Differentialgleichungen eines freien Systems angeht, so leiten wir ja in der Euklidischen Geometrie 7 Integrale ab; es sind dies:

das Integral der lebendigen Kraft,
die drei Flächensätze,
die drei Sätze über die Geschwindigkeit des

Schwerpunktes, aus welch' letzteren sich leicht 3 weitere Sätze über den Ort des Schwerpunktes ergeben.

Bei Annahme der nicht Euklidischen Geometrie hat es nun keine Schwierigkeit, das erste Integral, d.h. den Satz von der lebendigen Kraft, ebenfalls aufzustellen. Die folgenden Sätze dagegen gestalten sich anders, denn in der nicht Euklidischen Geometrie giebt es keinen Schwerpunkt, weil es keinen Begriff der parallelen Kräfte giebt. An Stelle der 3 Flächensätze und der 3 Geschwindigkeitssätze für den Schwerpunkt, welche die Euklidische Geometrie kennt und die zusammengenommen aussagen, daß das Drehmoment des Systems in Bezug auf jede Raumgerade genommen constant ist, treten hier dann 6 coordinierte Sätze, welche das Nämliche für jede Raumgerade aussagen.

Ist nämlich m_i die Masse, ω_i die Drehgeschwindigkeit des Punktes i in Bezug auf eine bestimmte Gerade, d.h. diejenige Componente der Bewegung, welche als eine einfache Rotation um die gewählte Axe angesehen werden kann, so gilt für 6 beliebige Axen der Satz, daß

$\Sigma m_i \cdot \omega_i = \text{const.}$ ist.

" Aus diesen 6 Sätzen folgt von selbst die

Constanz des Drehmomentes für jede beliebige Z^e gerade Linie." Diese Theorie ist ebenfalls in der ersten Schering'schen Arbeit enthalten, jedoch nur mit Worten, ohne Formeln, ausgeführt.

3.) Was nun endlich die Mechanik der starren Körper angeht, so lassen sich, allgemein zu reden, in ihr dreierlei geometrische Theorien abgrenzen.

a.) Die erste Theorie nimmt auf die Massenverteilung im Körper selbst noch keine Rücksicht, es handelt sich bei ihr um die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte am starren Körper oder auch um die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen eines starren Körpers. Die Verbindung dieser zweierlei Gegenstände hängt eng zusammen mit der Lehre von den virtuellen Geschwindigkeiten; vergl. Math. Annalen 4. „Aufsatz über den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper." (Klein.)

b.) Eine zweite Theorie betrachtet die Massenverteilung im Körper, sie wird spez. als Massengeometrie (géométrie des masses) bezeichnet. Schwerpunkt, Hauptträgheitsaxen u. s. w. sind die Begriffe, welche hier discutiert werden. Auch die Theorie der unendlich kleinen Oscillationen eines Körpers um die Gleichgewichtslage gehört hierher.

c.) Man wird drittens die endlichen Bewegungen eines sich selbst überlassenen freien Körpers geometrisch betrachten können (Poinsots rollende Kegel).

Die drei Problemstellungen sind vielfach behandelt worden; wir geben eine kurze Uebersicht der bez. Literatur:

Ad. a. Was zunächst den ersten Punkt angeht, so giebt es eine ältere, auf Poinsot zurückgehende Theorie.*) Poinsot benutzt nämlich vor allen Dingen solche Kräfte, die unendlich klein sind, aber in der unendlich fernen Ebene liegen, so dass sie in Bezug auf den starren Körper wohl ein Drehmoment, aber keine Parallelcomponente haben. Poinsot war jedoch ein Mann der elementaren Darstellung, der seinen Schülern nicht zumuten wollte, sich unendlich ferne, unendlich kleine Kräfte zu denken. Deswegen führte er an ihrer Statt den Begriff des „Kräftepaares" ein, unter dem man sich ein Paar (entgegengesetzter) paralleler und entgegengesetzt gleicher Kräfte in einem gewissen durch das endliche Drehmoment bestimmten Abstand zu denken hat.

(In der That haben solche Kräfte ein Resultante, die im Unendlichen angreift, aber ihrer Grösse nach

*) die noch fast überall benutzt wird.

gleich 0 ist, d.h. sie sind ein Aequivalent für unsere unendlich kleine unendlich ferne Kraft.) Doch wollen wir hier den Begriff der unendlich fernen Kraft beibehalten, weil wir dadurch deutlicher das Princip der Methode bezeichnen können. Dann beruht die Poinsotsche Behandlung der Kraftsysteme am starren Körper in folgendem:

Poinsot geht behufs Zusammensetzung der Kräfte davon aus, dass man jede Kraft zerlegen kann in eine solche Kraft, welche an einem festen Punkte angreift und in eine solche (unendliche kleine) Kraft, welche in der ∞ fernen Ebene liegt, und er hat also nur zu untersuchen, erstens die Zusammensetzung solcher Kräfte, die auf einen festen Punkt wirken, und zweitens die Zusammensetzung solcher Kräfte, die in der unendlich fernen Ebene liegen.

Dieser Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte geht nun genau parallel eine Lehre von der Zusammensetzung der unendlich kleinen Drehungen, welche ein starrer Körper erleiden kann. Den geraden Linien, nach welchen die Kräfte wirken, entsprechen dabei die Axen, um welche die Rotationen stattfinden, insbesondere den unendlich weiten Kräften entsprechen Rotationen um unendlich weite Axen, d.h.

unendlich kleine Parallelverschiebungen. Jede Drehung kann dann dem gerade ausgesprochenen Satze entsprechend zerlegt werden in eine Drehung um eine durch einen festen Punkt gehende Axe und eine Parallelverschiebung, und also reduciert sich die Aufgabe von der Zusammensetzung beliebiger Drehungen auf die Zusammensetzung von Drehungen um einen festen Punkt und auf die Zusammensetzung von Parallelverschiebungen.

Wir fragen uns nun sogleich: Lässt sich diese Poinsot'sche Theorie auf die Verhältnisse der nicht-Euklidischen Geometrie übertragen? Offenbar würde dies nur künstlich möglich sein, indem man an Stelle der ∞ fernen Ebene, welche uns in der nicht-Euklidischen Geometrie fehlt, willkürlich eine beliebig auszuwählende feste Ebene des Raumes setzte. Jedenfalls ginge aber hierbei das Schöne, welches in der Poinsot'schen Theorie in der von selbst gegebenen ausgezeichneten Lage der ∞ fernen Ebene liegt, verloren.

Nun giebt es aber neben der älteren Theorie von Poinsot noch eine zweite auf dieselben Fragen bezügliche Theorie, die Schraubentheorie von Ball. 1873. (The theory of Screws.).

Dieselbe ist neuerdings in einem deutschen Werke

dargestellt worden: Gravelius, „Theoretische Mechanik starrer Körper." (1889). „In dieser Schraubentheorie sieht Ball principiell ab von der Zerlegung des Zusammensetzungsproblems, welche mit Hülfe der ∞ fernen Ebene zu bewerkstelligen ist, stellt vielmehr gleich das allgemeine Problem voran, indem er die unendlich kleinen Bewegungen als etwas Ganzes, Unzerlegbares betrachtet:

„Wenn irgend zwei ∞ kleine Schraubenbewegungen eines Körpers um beliebige (im Allgemeinen zu einander windschiefe) Axen gegeben sind, wie konstruiere ich alsdann die resultierende ∞ kleine Schraubenbewegung?

Das ist die Frage, mit der Ball beginnt, und auf deren Antwort er ein ganzes Lehrgebäude aufbaut.

Welches ist der Wert dieser Ball'schen Theorie?

„Offenbar erscheint die Ballsche Schraubentheorie beim völlig freien Körper nur als eine andere Form der Poinsotschen Theorie, wenn es sich aber um Körper handelt, deren Beweglichkeit durch 1, 2, 3, 4, 5 Bedingungen allgemeinster Art gehemmt sind, *) Bedingungen, welche vielleicht gar keine Parallel-

*) Man sagt in diesem Falle, der Körper habe nur 5, 4, 3 etc. „Grade der Freiheit".

verschiebung des Körpers oder eine reine Rotation derselben mehr zulassen, sondern nur Verschiebungen, die notwendig mit Rotationen verbunden sind, (bez. Rotationen, die mit Parallelverschiebungen verbunden sind), so ist die Ballsche Theorie durchaus notwendig. Denn eine Zerlegung im Poinsotschen Sinne findet dann nicht mehr statt."

„Die Ballsche Schraubentheorie kann nun in der That ohne sonderliche Mühe auf die nicht-Euklidische Geometrie übertragen werden, weil auch im nicht-Euklidischen Raume jede Bewegung eine Schraubenbewegung ist. Nur muss man beachten, dass die nicht-Euklidische Schraubenbewegung 2 Axen hat, die sich im hyperbolischen Falle allerdings noch gut unterscheiden lassen, dagegen im elliptischen Falle durchaus gleich berechtigt sind."

Litteratur:

a./ Lindemann, Diss. Bd. 7. der Annalen (1873).
„Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektiver Maassbestimmung."

b./ Clifford, Gesammelte Werke No. 44.
„On the Theorie of Screws in a space of Constant Positive Curvature." datirt 1876.)

c./ Arbeiten von Ball in den Abhandlungen der irischen Academie. Genauere Citate v. im oben erwähnten Werke von Gravelius. pag. 619.

Näher auf diese Verhältnisse einzugehen, würde natürlich viel zu weit führen.

Wir gehen jetzt über:

Ad. b. zur Betrachtung der Massengeometrie.

Wir wollen zunächst in geometrischer Weise ausführen, was wir unter dem „Schwerpunkt" und den „Trägheitsaxen" eines Körpers zu verstehen haben, und zwar wollen wir in dieser Hinsicht diejenige Definition geben, die Hesse in seinen Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes pag. 353 ff. anführt.

Es sei:

$$\frac{ux + vy + wz - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 0.$$

die Gleichung einer beliebigen Ebene. Die linke Seite ist der Abstand, den ein Punkt x, y, z von der Ebene hat. Das Quadrat dieses Ausdruckes multipliciert mit der Masse m des Punktes x, y, z giebt uns das „zweite Moment des Punktes in Bezug auf die Ebene" als:

$$m \cdot \left[\frac{ux + vy + wz - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right]^2.$$

(Die dritten, vierten, ... Potenzen des Klammer-

ausdrucks multipliciert mit m würden entspr. das Moment dritter, vierter, u.s.w. Ordnung geben.)

Sind mehrere discrete Massenpunkte vorhanden, so stellt sich das Gesammtmoment derselben in Bezug auf die Ebene dar als:

$$\Sigma_n m_n \left(\frac{ux_n + vy_n + wz_n - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right)^2;$$

während, wenn ein continuierlich ausgedehnter Körper vorliegt, das Gesammtmoment die Form annimmt:

$$\int dm \left[\frac{ux + vy + wz}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right]^2,$$ wo die Integration über den ganzen Körper zu erstrecken ist. Dies Moment zweiter Ordnung des Körpers in bezug auf die Ebene können wir natürlich nach u, v, w, entwickeln, wir bekommen die quadratische Form:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 + \ldots,$$

wo $A, B, C \ldots$ u.s.w. von der Gestalt des Körpers abhängige Constante sind.

„Hesse benennt nun als das imaginäre Bild eines festen Körpers diejenige nullteilige Fläche 2ten Grades, welche umhüllt wird von solchen Ebenen, betreffs deren das Moment 2ter Ordnung unseres Körpers gleich 0 ist."

Die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten erhalten wir ganz einfach durch Nullsetzen des obigen Ausdrucks.

„Der Schwerpunkt des Körpers und seine 3 Hauptträgheitsaxen sind nun einfach der Mittelpunkt und die Hauptaxen dieses imaginären Bildes."

An die Theorie der Trägheitsmomente und Hauptträgheitsaxen knüpft nun an:
ad. c. die Betrachtung der Bewegung eines freien, sich selbst überlassenen Körpers.

Wir haben uns hier zu fragen, 1. wie ist die Bewegung des Schwerpunktes, 2. wie ist die Drehung des Körpers um denselben.

In Betreff des ersten Punktes gilt der Satz, dass, wenn keine äusseren Kräfte auf den Körper wirken, der Schwerpunkt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt andererseits wird gegeben durch die Gleichungen:

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C).\ q.r$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A).\ r\,p$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)\cdot p\,q,$$ wo p, q, r die

instantanen Drehungsgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsmomente des Körpers sind. Es sind dies die bekannten Eulerschen Gleichungen der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt, wie man sie in jedem Lehrbuch der Mechanik findet. Die Auswertung dieser Formeln geschieht entweder durch Integration mittelst elliptischer Funktionen oder nach Poinsot in geometrischer, der Anschauung zugänglicher Weise, indem man einen gewissen Kegel auf einem anderen sich abrollen läßt.

Wir werden nun wieder fragen, wie stellt sich diese Theorie der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt bei nicht-Euklidischer Maassbestimmung dar? Eine Antwort giebt (unter Beschränkung auf den elliptischen Raum) Clifford in seiner Abhandlung: „Motion of a Solid in Elliptic Space." № 44 seiner gesam. Werke. (1874).

Clifford beginnt damit, zunächst das Analogon zu Hesse's Definition der Trägheitsachse aufzusuchen. Es sei die Fundamentalfläche der elliptischen Maassbestimmung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Man bilde dann den Ausdruck:

$$\sum m^{(i)} \frac{(u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)} + u_4 x_4^{(i)})^2}{x_1^{(i)2} + x_2^{(i)2} + x_3^{(i)2} + x_4^{(i)2}},$$

genommen über alle Massenpunkte des Systems. Diesen Ausdruck nennt Clifford natürlich das zweite Moment des Systems in Bezug auf die Ebene u. Entwickelt nimmt derselbe die Form an:

$$A_{11} u_1^2 + 2A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2A_{13} u_1 u_3 + 2A_{23} u_2 u_3 + A_{33} u_3^2 + 2A_{14} u_1 u_4 + 2A_{24} u_2 u_4 + 2A_{34} u_3 u_4 + A_{44} u_4^2.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich null, so erhalten wir die Bedingung dafür, daß die Ebene u ein verschwindendes zweites Moment hat. Die Gesammtheit der Ebenen dieser Eigenschaft nennen wir wieder das „imaginäre Bild des Körpers." Auch hier ist dasselbe eine nullseitige Fläche zweiten Grades, da ja unser ursprünglicher Summen-Ausdruck rein aus Quadraten zusammengesetzt war. Diese Fläche zweiten Grades hat nun mit unserer Fundamentalfläche zweiten Grades ein Polartetraeder gemein. Im Fall der Euklidischen Geometrie lieferte das gemeinsame Polartetraeder des imaginären Bildes und der absoluten Fläche d. h. des imaginären Kugelkreises gerade in seinen im Endlichen verlaufenden Kanten

die drei Hauptträgheitsaxen durch den Schwerpunkt des Körpers, während die drei anderen Kanten in der ∞ fernen Ebene lagen. Doch hier, im elliptischen Falle, tritt natürlich die Vereinfachung nicht ein, die für den genannten Euklidischen Fall maassgebend ist, dass nämlich eine ausgezeichnete Ebene, die wir von vornherein kennen (nämlich die unendlich ferne Ebene des Euklidischen Raumes) dem Polartetraeder angehört.

„Das gemeinsame Polartetraeder des imaginären Bildes und der absoluten Fläche giebt nun in seinen Kanten diejenigen 6 Linien, welche Clifford als die 6 Hauptträgheitsaxen des Körpers bezeichnet."

Da es sich hier um ein Polartetraeder der absoluten Fläche handelt, so ist eine Drehung um eine unserer Kanten zugleich eine Verschiebung längs der konjugierten Kante. Seien jetzt u, v, w die Drehungsgeschwindigkeiten längs dreier Kanten unseres Tetraeders, die in einem Eckpunkte zusammenlaufen, x, y, z die Verschiebungsgeschwindigkeiten längs derselben drei Kanten, dann wird nach Clifford l.c. die Bewegung eines freien, keinen äußeren Kräften

unterworfenen Körpers durch folgendes den Euler-
schen Gleichungen analage System gegeben:
$\frac{dx}{dt} = C(vw - yz)$ und zwei analage Gl. für
$\frac{dy}{dt}$ u. $\frac{dz}{dt}$

und
$\frac{du}{dt} = C'(zv - yw)$ und zwei weitere Gl. für
$\frac{dv}{dt}$ u. $\frac{dw}{dt}$. Dieses System besteht also aus 6 von einander nicht abtrennbaren Differen-
tialgleichungen, die im übrigen nach der Be-
arbeitung harren.

„Der Euklidische Fall ist hier eben deswegen sehr viel einfacher, indem von den 6 hingeschrie-
benen Gleichungen die drei ersten ohne weiteres sich erledigen, die auf die Bewegung des Schwer-
punktes treffen; die drei anderen sind dann die gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen."

Soviel über die Mechanik fester Körper.

Wir werden unseren bisherigen Betrachtungen zum Schluß noch in einem kurzen Abriß die Behandlung gewisser geometrischer Fragen der nicht-Euklidischen Geometrie hinzufügen, die wesentlich sind und bisher noch nicht berück-
sichtigt waren.

Nachträge zur nicht-Euklidischen Geometrie

1.) Was zunächst die Aufstellung allgemeiner algebraischer Formeln für die Maassverhältnisse des R_3 angeht, so werden wir natürlich auszugehen haben von einer beliebigen quaternären quadratischen Gleichung: $\sum_1^4 a_{ik} x_i x_k = 0$ oder in Ebenencoordinaten geschr. $\sum_1^4 \alpha_{ik} u_i u_k = 0$, welche uns das unserer Maassbestimmung zu Grunde zu legende Fundamental-Gebilde zweiten Grades ergiebt. Wir werden dann zunächst zu fragen haben, wie wir den Abstand zweier Punkte und den Winkel zweier Ebenen in Bezug auf dies Gebilde definieren wollen. Die hier in Betracht kommenden Formeln werden genau analog denen für die Ebene sein. Der Abstand zweier Punkte x, y ist z.B. als

$$M_{x,y} = c \cdot \log \cdot \mathfrak{D}\mathfrak{V} = c \log \cdot \frac{\sum xy + \sqrt{\sum^2 xy - \sum xx \sum yy}}{\sum xy - \sqrt{\sum^2 xy - \sum xx \sum yy}}$$

oder anders geschrieben:

$$= \frac{2c}{i} \text{ arc. cos. } \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum xx \sum yy}} \text{ etc. zu definieren.}$$

Diese Formeln stimmen mit denen der Ebene genau überein, nur daß die Σ bis zum Index 4 laufen, nicht nur bis zum Index 3 wie in der Ebene. Es ist kaum nötig, ausführlicher

hierbei zu verweilen.

Doch im Raume können wir gewisse höhere Probleme der Maassgeometrie aufstellen, für welche in der Ebene sich noch kein Analogon bietet. Wenn auch den Definitionen des Abstandes zweier Punkte, des Winkels zweier Ebenen, des Abstandes eines Punktes von einer Ebene im Raume genau die entsprechenden Definitionen des Abstandes zweier Punkte, des Winkels zweier Geraden, des Abstandes eines Punktes von einer Geraden in der Ebene gegenüberstehen, so haben wir im Raume noch die Beziehungen der geraden Linien zu sich selbst und den Punkten und Ebenen. Man spricht z. B. bei 2 windschiefen Geraden in der Euklidischen Geometrie von dem kürzesten Abstand derselben, ausserdem auch von ihrer Neigung; dieselben Fragen lassen sich natürlich auch in der nicht-Euklidischen Geometrie stellen. Wir wollen gleich den Standpunkt einnehmen, dass wir einen n-fach ausgedehnten Raum betrachten.

„Es entsteht alsdann das allgemeine Problem, in einem solchen Raum von n Dimensionen für irgend 2 lineare Mannigfaltigkeiten desselben bezw. von u und von v Dimensionen die für

sie in Betracht kommenden Maassunterschiede zu berechnen."

Solche Fragen sind in allgemeinster Weise gelöst von dem italienischen Mathematiker d' Ovidio in Turin in den beiden Arbeiten:
a.) Studio sulla geometria projettiva.*) Annali di Matem. VI. 1873 (vgl. auch das Referat von mir im Bd. V der Fortschritte der Mathem. p. 273 ff.)
b.) Le funzione metriche fondamentali negli spazi di quanto si vagliano dimensione e di curvatura constante. Mem. Acad. dei Lincei. Bd. I. 1876.

Ein Auszug der letzten Arbeit findet sich in den Annalen Bd. XII.**)

2.) Was nun die speziellen Realitätsverhältnisse angeht im Raum von 3 Dimensionen, so haben wir besonders die drei Fälle zu unterscheiden, daß unsere Fundamentalfläche dem ovalen, nullteiligen oder ringförmigen Typus der eigentlichen Flächen zweiten Grades angehört.

*) geometria projettiva ist soviel wie nicht-Euklidische Geometrie, d.h. metrische Geometrie von projektiven Standpunkte aus.

**) vergl. übrigens auch, was die Verhältnisse speziell des R_3 angeht, die schon auf pag. 216. genannte Arbeit von Lindemann in Bd. 7 der Math. Ann.

Im ersten Falle ergab sich die hyperbolische Geometrie, für die wir besonders Interesse gewannen, wegen ihrer Beziehung zur Funktionentheorie. Im zweiten Falle hatten wir es mit der elliptischen Geometrie zu thun. Diese wird von einem gewissen theoretischen Standpunkte aus den Vorzug der größten Symmetrie haben, indem in ihr das Princip der Dualität unbedingt gilt. So z. B. ist hier der Abstand zweier Punkte gleich dem Winkel der beiden Polarebenen, was bei der hyperbolischen Geometrie aus leicht ersichtlichen Gründe nicht der Fall ist. [da wir die von unserer Verfügung abhängenden Constanten c, k für Abstände und Winkel im hyperbolischen Falle von einander verschieden wählen.]. Den dritten Fall endlich haben wir überhaupt nicht näher betrachtet, da man bei ihm von jedem Punkte des Raumes aus einen einteiligen Kegel an die Fundamentalfläche legen kann, das Bogenelement also in jedem Teile des Raumes durch eine indefinite Form der Differentiale dx gegeben wird. Dieser Fall ist in der That interesselos für uns, falls uns daran liegt, Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie zu haben. Aus demselben Grunde haben wir uns auch im

Fall der hyperbolischen Geometrie wesentlich auf das Innere der Fundamentalfläche beschränkt, da wir ausserhalb derselben wieder ein indefinites Bogenelement haben würden.

Die Euklidische Geometrie ist dann ein specieller Fall der parabolischen Geometrie, die den Uebergangsfall zwischen hyperbolischer und elliptischer Geometrie bildet. Ihr liegt eine nulltheilige Curve zweiten Grades zu Grunde. Wollten wir vollständig schematisieren, so würden wir noch eine ganze Zahl weiterer specieller Fälle der Maassbestimmungen aufzuzählen haben, je nach der Art der betr. Fundamentalfläche 2ten Grades. (z. B. einteiliger Kegelschnitt, Linienpaar u. s. w.) Doch gehen wir nicht näher darauf ein, da unser Interesse ja wesentlich an den erwähnten drei Fällen haftet.

3.) Im Schluß möchte ich noch einiges über die elliptische Geometrie sagen, was von früher her im Rückstande ist. Wir hatten hier doch zwei besondere Arten von Bewegungen kennen gelernt, die wir als „Schiebungen" bezeichneten. Werden die Variabeln λ, μ in gewohnter Weise auf der Fläche gedeutet, um die Erzeugenden festzulegen, so war z. B. eine Schiebung der ersten Art charakterisiert

dadurch, dass man die u unverändert liess, die λ aber einer linearen Substitution unterwarf, die im Fall der reellen Schiebung den Quaternionen-typus annahm:

$$\lambda' = \frac{(A + i\,C)\,\lambda - (B - i\,D)}{(B + i\,D)\,\lambda + (A - i\,C)}.$$

Die zugehörige Substitution der x schrieb sich in der Quaternionensprache alsdann:

$$(x_1' + i x_2' + j x_3' + k x_4') = (A + i B + j C + k D)(x_1 + i x_2 + j x_3 + k x_4).$$

Wir hatten auch bereits gelernt, dass hierbei eine ganze Congruenz reeller gerader Linien in sich verschoben wird. Genäss unserer früheren Auseinandersetzungen ergiebt sich dann der Satz:

„Unsere specielle Bewegung, welche wir als eine Schiebung des Raumes bezeichneten, hat zweifach ∞ viele Schraubenaxen, indem jeder Punkt des Raumes eine gerade Linie beschreibt und jede Ebene des Raumes sich um eine in ihr liegende gerade Linie dreht." In der That wird jede Linie unserer Congruenz als eine Schraubenaxe unserer Bewegung angesehen werden können, woraus der zweite Theil unseres Satzes folgt, insofern doch durch jeden Punkt des Raumes eine Congruenz-gerade hindurchgeht und in jeder Ebene

des Raumes eine Congruenz-gerade liegt.

Wir können diese Vorstellung einer solchen Bewegung nun aufs schönste beleben, wenn wir die Idee der Continuität anwenden, wie sie ja bereits in den Worten „schrauben" und „Bewegung" liegt. Dieser Idee können wir bereits in den Substitutionen des λ Ausdruck geben. Wenn wir mit ξ, η, ζ auf der λ-Kugel den Endpunkt des Durchmessers festlegen, um welchen sich die Drehung vollzieht, die unserer Substitution von Quaternionentypus entspricht, so war zu setzen:

$$A = \cos. \frac{\varphi}{2}.$$
$$B = \eta \sin. \frac{\varphi}{2}.$$
$$C = \xi \sin. \frac{\varphi}{2}.$$
$$D = \zeta \sin. \frac{\varphi}{2},$$

abgesehen von einem unwesentlichen Proportionalitätsfaktor. Setzen wir für A, B, C, D diese Werte in die Substitutionsformel der x ein, so nimmt diese die Gestalt an:

$$(x_1' + ix_2' + jx_3' + kx_4') = (\cos. \varphi/2 + (i\eta + j\xi + k\zeta) \sin. \frac{\varphi}{2}).$$
$$(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4).$$

Der Idee der Continuität tragen wir nun ganz einfach Rechnung, indem wir den Winkel $\varphi = \vartheta$

allmählich wachsen lassen, bis für $\varphi = 2\pi$ alles wieder wird, wie es war. Es bewegt sich dann der Raum [illegible] längs der einzelnen Schraubenaxen, d. h. der Congruenzlinien so, bis er zur Anfangslage zurückgekommen ist.

Fragen wir nun, wie groß das Stück ist, um welches sich ein Punkt bei einem beliebigen $\not\subset \varphi$ verschiebt oder wie groß der Winkel ist, um den eine Ebene sich dreht, eine Frage, die wir oben ausdrücklich unerledigt gelassen hatten, so ergiebt sich bei einfacher Ausrechnung der Satz:

„Verstehen wir unter φ die Amplitude der Drehung, welche die k = Kugel bei festgehaltenem Punkte ξ, η, ζ erfährt, so erleidet unser elliptischer Raum (bei welchem die Gesammtlänge der geraden Linie gleich π ist) eine Schiebung längs eines bestimmten Strahlensystems, bei welcher jeder Punkt auf der durch ihn gehenden Linie des Strahlensystems um $\frac{\varphi}{2}$ fortschreitet, während sich jede Ebene um die in ihr liegende gerade Linie des Strahlensystems um $\frac{\varphi}{2}$ dreht."

Diesem Satz können wir noch eine besondere Bedeutung geben, wenn wir unsere Aufmerksamkeit

auf eine specielle Art von Flächen 2ten Grades richten, nämlich auf solche Flächen 2ten Grades, die mit der absoluten Fläche zweiten Grades 4 Erzeugende, je zwei der einen und der anderen Art, gemeinsam haben.

Ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche, so wird eine Fläche der verlangten Eigenschaft beispielsweise gegeben durch: $\varrho(x_1^2 + x_2^2) + \sigma(x_3^2 + x_4^2) = 0$, wo ϱ, σ beliebig. Man erhält eine solche ausgezeichnete Fläche 2ten Grades auch leicht geometrisch, indem man aus einer unserer Congruenzen irgend drei Linien herausgreift, die doch unsere Fundamentalfläche in Punkten derselben beiden Erzeugenden z. B. der ersten Art treffen. Nun kann man sofort das Hyperboloid konstruieren, welches diese drei Linien enthält, indem man an ihnen entlang eine gemeinsame Transversale laufen läßt. Dieses Hyperboloid wird unsere Fläche in 2 Erzeugenden der ersten Art treffen, also wird es ihr auch in 2 Erzeugenden zweiter Art begegnen, d. h. eine unserer ausgezeichneten Flächen 2. Grades sein.

Umgekehrt wird jede ausgezeichnete Fläche 2ten Grades, d. h. jede Fläche, welche die absolute

Fläche in einem windschiefen Vierseit schneidet, mit den Linien ihrer einen Erzeugung einer rechts gewundenen Congruenz und mit den Linien ihrer anderen Erzeugung einer links gewundenen ausgezeichneten Congruenz angehören."

Nun wird doch der Raum mit seinen Punkten sich längs der einzelnen Linien der einen oder anderen Congruenz in besprochener Weise verschieben lassen. Eine ausgezeichnete Fläche zweiten Grades läßt sich daher auf 2 Arten continuierlich in sich selbst überführen, indem man entweder die Erzeugenden der einen Art oder die Erzeugenden der anderen Art als Bahncurven benutzt." Da es sich hierbei um eine Collineation des Raumes handelt, bei welcher auch die Erzeugenden der nicht benutzten Art wieder in Erzeugende übergehen müssen, so sehen wir, daß unsere Fläche 2ten Grades die schöne Eigenschaft besitzt, daß 2 Erzeugende der einen Art gleich große Stücke abschneiden. Dies ist die in Aussicht gestellte Folgerung aus dem Satze der p. 231.

Die ausgezeichneten Congruenzen in der elliptischen Geometrie, längs denen sich der Raum verschieben kann, und die ausgezeichneten Flächen, deren Erzeugende den Congruenzen der einen oder

der anderen Art angehören, das sind nun die Gebilde, auf die seiner Zeit Clifford zuerst die Aufmerksamkeit lenkte. Ich möchte seine bezüglichen Ideen hier um so lieber erwähnen, als dieselben nicht publiciert sind. Es war auf der Versammlung der British Association zu Bradford 1873 (der ich selbst beiwohnte), wo Clifford diese Dinge in einem Vortrage mitteilte. In den Reports of the British Association wird davon indes nichts als die Ueberschrift angegeben: „On a surface of zero curvature and finite extent," die sich auch in den gesammelten Werken von Clifford ohne jede Erläuterung wieder findet.

Es läßt sich zeigen, eben aus ihrem Verhalten bei den Schiebungen, daß unsere ausgezeichneten Flächen, in dem elliptischen Raume, der sie enthält, wirklich das Krümmungsmaass 0 besitzen. Ferner sieht man leicht, daß selbstverständlich ihr Gesammtflächeninhalt endlich ist, weil ja die Länge der erzeugenden geraden Linien eine endliche ist, womit ein erstes Beispiel dafür gegeben ist, daß eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die das Krümmungsmaass Null besitzt, nicht ausgedehnt zu sein braucht.*

*) In der That bin ich zu den allgemeinsten Erläuterungen

Aber das Interessante, was Clifford hinzufügte, waren einige Bemerkungen bezüglich der Definition des Parallelismus, die besonders unsere Aufmerksamkeit verdienen, da ja die erste Entwickelung der nicht-Euklidischen Geometrie bekanntlich gerade an die Frage, was Parallelen seien, anknüpfte.

Unsere nicht-Euklidische Definition des Parallelismus soll eine Generalisierung der gewöhnlichen Definition sein. Nun hat man aber den Begriff "parallel" vor Clifford nur in einer Weise generalisiert, indem man sagt: Parallele Linien sind solche Linien, welche einen ∞ fernen Punkt gemein haben. Diese Definition geht ja in der That in die gewöhnliche über, wenn wir von einer ∞ fernen Ebene sprechen. Uebrigens aber giebt es ihr zufolge im hyperbolischen Raum 2 Parallele durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden, im elliptischen Raum aber giebt es überhaupt keine Parallelen, da es ja auch keinen ∞ weiten Punkt giebt.

Den so definierten Parallelen des nicht Euklidischen Raumes geht jedoch ziemlich die Gesammtheit der eleganten und bequemen Eigenschaften ab,

*) hierüber, die ich im Wintersemester gab, von Cliffords Bemerkung aus gekommen.

welche wir bei den Parallellinien des Euklidischen Raumes kennen.

In der Euklidischen Geometrie können wir z. B. den Raum in den Parallellinien verschieben, nicht aber in der nicht-Euklidischen Geometrie, sofern wir eben an der genannten Definition der Parallelen im nicht-Euklidischen Raume festhalten.

Dem gegenüber bringt Clifford in Vorschlag, zwei Linien parallel zu nennen, wenn sie derselben ausgezeichneten Congruenz der einen oder der anderen Art angehören, d. h. wenn sie dieselben 2 Erzeugenden der einen resp. der anderen Art der Fundamentalfläche gleichzeitig treffen. Im hyperbolischen Raume sind diese Parallelen natürlich imaginär, im elliptischen Raume aber giebt es zweierlei Arten, die rechts gewundenen und die links gewundenen Parallelen. Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie kann ich zu ihr 2 Parallele ziehen, eine rechts gewundene und eine links gewundene. Im speciellen Falle des Euklidischen Raumes gehen sie in die gewöhnlichen Parallelen über. Der Unterschied der neuen Parallelen des elliptischen Raumes von den Parallelen der Euklidischen Geometrie ist natürlich der, daß sie windschief sind, solange

nicht der nicht-Euklidische Raum in einen Euklidischen ausartet, dagegen haben sie mit den gewöhnlichen Parallelen die Eigenschaft gemein, gleichzeitig die Trajektorien ein- und derselben Raumbewegung bilden zu können. Hierauf beruht es dann, dass bei dieser Definition der Parallellinien im nicht-Euklidischen Raume fast alle geometrischen Sätze und Eigenschaften, die in der Elementargeometrie über Parallellinien aufgestellt werden, sich wieder finden.

„Beispielsweise können wir die Eigenschaft der ausgezeichneten Flächen 2ten Grades, die wir eben kennen lernten, jetzt dahin aussprechen, dass dieselbe durch ihre Erzeugenden in lauter Parallelogramme zerlegt wird, wobei mit dem Wort Parallelogramm im Gegensatze zur Euklidischen Geometrie eine Figur bezeichnet wird, die nicht eben ist, aber übrigens fast alle Eigenschaften des gewöhnlichen Parallelogramms besitzt."

Hiermit schliesse ich die gegenwärtige Vorlesung. Es ist mir eine Genugthuung, dass ich zuletzt noch in ausgiebiger Weise der Clifford'schen Ideen habe gedenken können. In der That habe ich mich wenigen Geometern so eng verbunden gefühlt, als eben, vom Zeitpunkte

unserer persönlichen Bekanntschaft an, (1873), Clifford, den wenige Jahre darauf eine unselige Krankheit wegraffte, so daß uns Ueberlebenden die Pflicht blieb, die fundamentalen Gedanken, mit denen er sich trug, und die aus seinen fragmentarischen Publicationen nur unvollkommen zu erkennen sind, von uns aus zu erläutern und zu verbreiten.

(Ende.)